Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

21.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, jos ja vain jos on olemassa sellainen reaaliluku a, että $f(x) = ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lineaarikuvauksen matriisi

Lause

Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi matriisi , joka määrää lineaarikuvauksen T.

Tätä matriisia kutsutaan lineaarikuvauksen (standardi)matriisiksi.

Esimerkki

Määritetään lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad L(a,b,c,d) = (a+b+d,\ -b+c-d,\ a+c).$$

standardimatriisi.

Mitkä väitteistä ova tosia?

(a) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $L(1,0) = (-2,3)$, $L(0,1) = (-5,4)$ ja $L(1,1) = (100,4)$.

(b) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $L(1,0) = (-2,3)$ ja $L(0,1) = (-5,4)$.

(c) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $L(1,-1) = (1,-3)$, $L(2,0) = (1,-2)$ ja $L(1,1) = (0,1)$.

Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on kuvauksen L *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in V$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$L(\bar{v}) = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

Esimerkki

Lineaarikuvauksella

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2,\ -2x_1 + 6x_2)$$

on ominaisvektori $\bar{v} = (2, 2)$.

Vektori $\bar{w} = (1, 2)$ puolestaan ei ole kuvauksen L ominaisvektori.

Esimerkki

Määritetään lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$L(x_1, x_2, x_3) = (x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3)$ ominaisarvot.