Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

19.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Mitä mieltä olet ratkaisusta?

Osoitetaan, että kuvaus $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (|x_1|\,, |x_2|)$ ei ole lineaarinen.

Ratkaisu:

Nähdään, että

$$\begin{aligned} G((x_1, x_2) + G(y_1, y_2)) &= (|x_1|, |x_2|) + (|y_1|, |y_2|) \\ &= (|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} G((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= G(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|). \end{aligned}$$

Koska $|x_1| + |y_1| \neq |x_1 + y_1|$ ja $|x_2| + |y_2| \neq |x_2 + y_2|$, kuvaus ei ole lineaarinen.

Bijektio

Kuvaus on bijektio, jos se on sekä surjektio että injektio.

Lineaarikuvaus $L\colon V \to W$ on bijektio, jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = W$ ja $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}_V\}$.

Isomorfismi

Määritelmä

Isomorfismi on bijektiivinen lineaarikuvaus.

Jos vektoriavaruuksien välillä on isomorfismi, avaruuksia kutsutaan *isomorfisiksi*.

Isomorfiset vektoriavaruudet ovat keskenään samanlaiset.

Esimerkki

Avaruudet $\mathbb{R}^2$ ja $\mathcal{P}_1$ ovat siis isomorfiset. Eräs isomorfismi niiden välillä on $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a, b) = ax + b$.

Mitkä väitteistä ovat totta?

Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

(a) Jos L on lineaarinen ja lisäksi pätee $L(1,0) = (1,0,-4)$ sekä $L(1,-1) = (2,1,2)$, niin $L(2,-1) = (3,1,-2)$.

(b) Jos $L(1,1) = (2,1,2)$ ja $L(-2,-2) = (-1,1,0)$, niin kuvaus L voi olla lineaarinen.

(c) Jos pätee $L(1,0) = (1,0,-4)$, $L(1,-1) = (2,1,2)$ ja $L(2,-1) = (3,1,-2)$, niin kuvaus L on lineaarinen.

Lineaarikuvaus voidaan määritellä antamalla kantavektoreiden arvot.

Tehtävä

Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1{+}x_2,\ x_1{+}x_2{+}2x_3,\ -2x_1{-}2x_2).$$

Määritetään sen ydin $\operatorname{Ker}(L)$ ja kuva $\operatorname{Im} L$.

Tehtävä: Määritä ytimen ja kuvan dimensiot.

Dimensiolause

Lause

Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Oletetaan, että V on äärellisulotteinen. Olkoon $L\colon V \to U$ lineaarikuvaus. Tällöin

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L).$$

Tehtävä

Oletetaan, että L on linearikuvaus. Voiko suora kuvautua tasoksi kuvauksessa L?