Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

15.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Lineaarikuvauksen kuva

Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *kuva* on joukko

$$\operatorname{Im} L = LV = \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\}.$$

Surjektio

Kuvaus on surjektio, jos kaikille maaliajoukon alkioille kuvautuu jotakin.

Lineaarikuvaus on surjektio, jos ja vain jos sen kuva on sama kuin maaliavaruus.

Injektio

Kuvaus on injektio, jos eri alkiot eivät voi kuvautua samaksi alkioksi.

Mistä tietää, että lineaarikuvaus on injektio?

Ydin

Lineaarikuvauksen ydin koostuu kaikista niistä lähtöavaruuden vektoreista, jotka kuvautuvat nollavektorille.

Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen ydin on

$$\operatorname{Ker} L = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

Esimerkki

Määritetään lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 - x_2)$$

ydin.

Ydin kertoo injektiivisyydestä

Lause

Lineaarikuvaus $L\colon V \to U$ on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}_V\}$.

Mitä kuva ja ydin kertovat?

Oletetaan, että $L\colon V \to W$ on lineaarikuvaus.

- Kuvaus L on surjektio, jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = W$.
- Kuvaus L on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}_V\}$.

Totta vai tarua?

(a) Vektori $(1, 0)$ on lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $L(a, b) = (a - b, b, a, 4a)$ ytimessä.

(b) Lineaarikuvauksen ytimessä ei välttämättä ole yhtään vektoria.

(c) Lineaarikuvauksessa suoran kuva on aina suora.

Perustele vastauksesi.

Bijektio

Kuvaus on bijektio, jos se on sekä surjektio että injektio.

Lineaarikuvaus $L \colon V \to W$ on bijektio, jos $\operatorname{Im} L = W$ ja $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}_V\}$.

Esimerkki

Osoitetaan, että lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a, b) = ax + b$ on bijektio.

Samankaltaiset vektoriavaruudet

Avaruus $\mathbb{R}^2$ näyttää samalta kuin avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus $\{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Kyseessä ei kuitenkaan ole sama joukko.

Avaruus $\mathbb{R}^2$ näyttää samalta kuin polynomiavaruus $\mathcal{P}_1$. Kyseessä ei kuitenkaan ole sama joukko.

Mistä tässä on kyse?

Isomorfismi

Määritelmä

Isomorfismi on bijektiivinen lineaarikuvaus.

Jos vektoriavaruuksien välillä on isomorfismi, avaruuksia kutsutaan *isomorfisiksi*.

Isomorfiset vektoriavaruudet ovat keskenään samanlaiset.

Esimerkki

Kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a,b) = ax + b$ on isomorfismi.

Avaruudet $\mathbb{R}^2$ ja $\mathcal{P}_1$ ovat siis isomorfiset.

Tehtävä

Tee parisi kanssa käsitekartta, jossa käytät ainakin seuraavia käsitteitä:

alivaruus, bijektio, injektio, isomorfismi, kanta, kannanvaihtomatriisi, koordinaatti, koordinaattivektori, kuva, lineaarikuvaus, matriisi, polynomi, surjektio, vapaus, vektoriavaruus, vektori, ydin, virittäminen