Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

14.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Tehtävä

Merkitään $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Anna esimerkki vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruudesta, johon A kuuluu ja B ei kuulu.

Määritelmä

Olkoot V ja U ovat vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on *lineaarikuvaus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $L(\bar{v} + \bar{u}) = L(\bar{v}) + L(\bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{u} \in V$

(b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Yhdistetty kuvaus

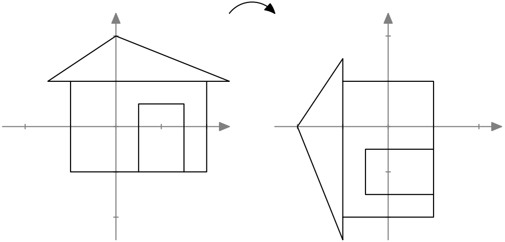
Oletetaan, että $L\colon V \to U$ ja $T\colon U \to W$ ovat lineaarikuvauksia. *Yhdistetty kuvaus* $T \circ L$ tarkoittaa kuvausta $V \to W$, jolle pätee

$$\bar{v} \mapsto T(L(\bar{v}))$$

kaikilla $\bar{v} \in V$.

L_B peilaus, L_C kierto

$$L_C \circ L_B$$



Lineaarikuvausten yhdistäminen

Kuvaus L_B saatiin matriisista

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja kuvaus L_C matriisista

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Minkä matriisin määräämä on yhdistetty kuvaus $L_C \circ L_B$?

Lineaarikuvausten yhdistäminen vastaa matriisikertolaskua!

Matriisin läytäminen

Minkä matriisin määräämä on lineaarikuvaus

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2,\ -3x_2,\ 2x_1 + x_2)?$$

Mitkä väitteistä ovat tosia?

Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ sen vektoreista muodostuva jono.

(a) Jos jotkin jonon $\mathcal{S}$ vektoreista ovat toistensa skalaarimonikertoja, jono $\mathcal{S}$ ei ole vapaa.

(b) Jos kaikki jonon $\mathcal{S}$ vektorit ovat erisuuntaisia, jono on vapaa.

Aliavaruuden kuva

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Avaruuden V aliavaruuden W *kuva* kuvauksessa L on joukko

$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}.$$

Tutki seuraavissa tapauksissa, päteekö $\bar{v} \in LW$.

(a) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_1 + x_2)$
$W = \mathrm{span}((1, 1))$
$\bar{v} = (2, 4)$

(b) L ja W kuten edelllä, $\bar{v} = (-4, -8)$

(c) L ja W kuten edelllä, $\bar{v} = (2, 2)$

(d) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$, $L(a, b) = ax^2 - cx + b$
$W = \{(a, b, c) \mid a + b = c\}$
$\bar{v} = -x^2 - x + 2$

Lineaarikuvauksen kuva

Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *kuva* on joukko

$$\operatorname{Im} L = LV = \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\}.$$

Surjektio

Kuvaus on surjektio, jos kaikille maaliajoukon alkioille kuvautuu jotakin.

Lineaarikuvaus on surjektio, jos ja vain jos sen kuva on sama kuin maaliavaruus.

Injektio

Kuvaus on injektio, jos eri alkiot eivät voi kuvautua samaksi alkioksi.

Mistä tietää, että lineaarikuvaus on injektio?

Ydin

Lineaarikuvauksen ydin koostuu kaikista niistä lähtöavaruuden vektoreista, jotka kuvautuvat nollavektorille.

Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen ydin on

$$\operatorname{Ker} L = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

Voidaan osoittaa, että kuvaus L on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.