Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

13.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

(a) Tehtävät on kirjattu. Oman paperinsa voi hakea Exactumin 3. kerroksesta.

(b) Tehtäviä ei tarkisteta. Kunkin on tarkistettava omat vastauksensa ratkaisuehdotuksesta.

Tehtävä

Onko vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ seuraavien vektoreiden virittämä?

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Määritelmä

Olkoot V ja U ovat vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on *lineaarikuvaus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $L(\bar{v} + \bar{u}) = L(\bar{v}) + L(\bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{u} \in V$

(b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Esimerkki

Osoitetaan, että kuvaus

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2,\ -3x_2,\ 2x_1 + x_2)$$

on lineaarikuvaus.

Matriisin määräämä lineaarikuvaus

Millainen lineaarikuvaus saadaan matriisista

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

Matriisin määräämä lineaarikuvaus

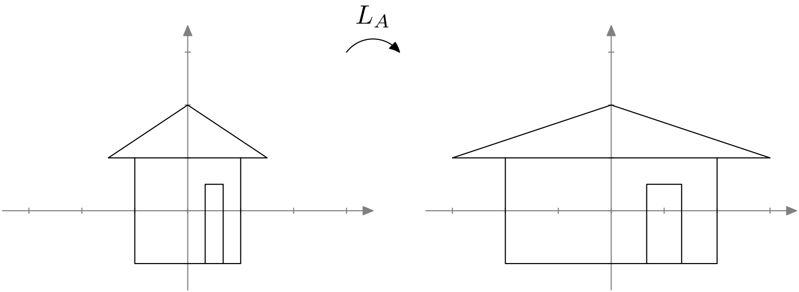
Lause

Oletetaan, että A on $m \times n$-matriisi. Matriisin A määräämä kuvaus $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$ on lineaarikuvaus.

Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}?$$


L_A

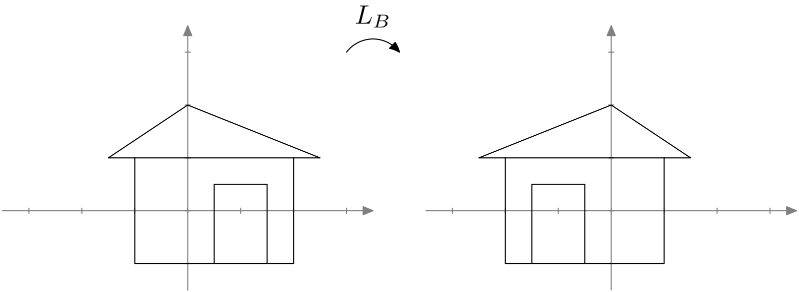
Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Vektorin $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kuva on

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$


L_B

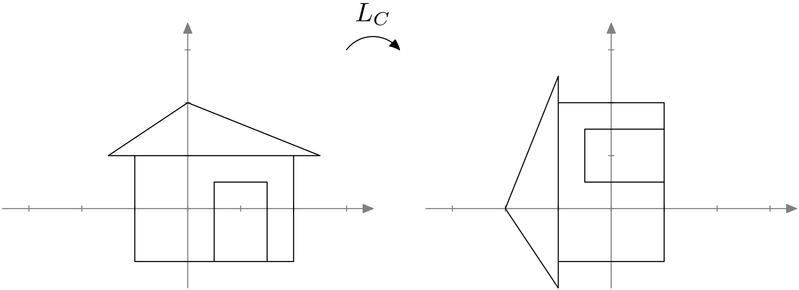
Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}?$$

Vektorin $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kuva on

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$


L_C

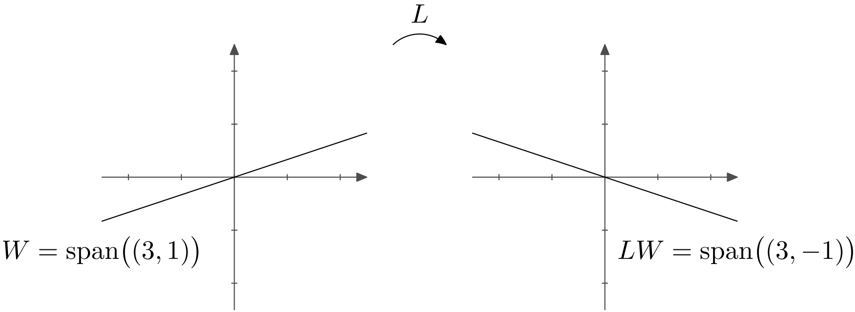
Aliavaruuden kuva

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Avaruuden V aliavaruuden W *kuva* kuvauksessa L on joukko

$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}.$$

Esimerkki

Tarkastellaan peilausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.
Mikä on aliavaruuden $W = \text{span}\big((3,1)\big)$ kuva LW?.



Tehtävä

Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2, 3x_1)$ ja aliavaruutta $W = \text{span}(-1, 2)$.

Mitkä seuraavista vektoreista ovat kuvassa LW?

(a) $\bar{v} = (-1, 2, -3)$

(b) $\bar{v} = (-2, 4, -6)$

(c) $\bar{v} = (1, 0, 3)$

Lisätehtävä: Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus ja W avaruuden V aliavaruus. Mikä vektori on taatusti kuvassa LW? Miksi?

Aliavaruuden kuva on aliavaruus

Lause

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Jos W on avaruuden V aliavaruus, niin kuva

$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}$$

on avaruuden U aliavaruus.