Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

12.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Kertausta: koordinaatit

Määritelmä

Olkoon $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in V$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan* $\mathcal{B}$ *suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \ldots, a_n$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n.$$

Määritelmä

Jos vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat $a_1, \ldots, a_n$, vektorin $\bar{u}$ *koordinaattivektori* kannan $\mathcal{B}$ suhteen on

$$[\bar{u}]_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n).$$

Kysymys

Vektorin $\bar{v}$ koordinaattivektori on $(-1, 2)$. Miltä $\bar{v}$ näyttää?

Kysymykseen on mahdotonta vastata!

Esimerkki

Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja $\mathcal{S} = ((1,0),(1,1))$ ja $\mathcal{T} = ((0,1),(2,3))$.

Vektorin $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ koordinaati vektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen on $(1,3)$. Mikä on vektorin vektorin $\bar{v}$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{T}$ suhteen?

Kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}}$

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on kannat $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$. Tälläin

$$P_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}}[\bar{a}]_{\mathcal{S}} = [\bar{a}]_{\mathcal{T}}$$

kaikilla $\bar{a} \in V$.

Määritelmä

Olkoot V ja U ovat vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on *lineaarikuvaus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $L(\bar{v} + \bar{u}) = L(\bar{v}) + L(\bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{u} \in V$

(b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Esimerkki

Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ on lineaarikuvaus.

Esimerkki

Kuvaus $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ ei ole lineaarikuvaus.

Esimerkki

Osoitetaan, että kuvaus

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2,\ -3x_2,\ 2x_1 + x_2)$$

on lineaarikuvaus.

Tehtävä

Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus, jolle pätee

$$L(1,0) = (1,4,5) \quad \text{ja} \quad L(0,1) = (0,-1,-1).$$

Määritä seuraavat kuvavektorit:

- $L(-2,0)$
- $L(1,1)$
- $L(5,-4)$.