Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

8.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Tehtävä

Oletetaan, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus ja $(2,1,0),(-1,0,1) \in W$. Mitkä seuraavista vektoreista ovat aliavaruuden W alkioita?

(a) $(-3,0,3)$

(b) $(3,2,-1)$

(c) $(1,1,2)$

Kertausta: vapaus

Määritelmä

Vektoriavaruuden V vektoreista muodostuva jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*.

Esimerkki

Merkitään

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Osoitetaan, että jono (A_1, A_2, A_3) on vapaa.

Esimerkki

Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in W$. Onko jono $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{v})$ vapaa?

Mitkä seuraavista ovat vapauden määritelmän kanssa yhtäpitäviä?

Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee

(a) $c_1 \bar{v}_1 + \cdots + c_k \bar{v}_k = \bar{0}$, kun $c_1 = 0$, ..., $c_k = 0$

(b) $c_1 \bar{v}_1 + \cdots + c_k \bar{v}_k = \bar{0}$ vain, jos $c_1 = 0$, ..., $c_k = 0$

(c) $c_1 \bar{v}_1 + \cdots + c_k \bar{v}_k = \bar{0}$ joillakin $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$

(d) jos $c_1 = 0$, ..., $c_k = 0$, niin $c_1 \bar{v}_1 + \cdots + c_k \bar{v}_k = \bar{0}$

(e) yhtälöllä $c_1 \bar{v}_1 + \cdots + c_k \bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Kertausta: kanta

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in V$. Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vektoriavaruuden V kanta, jos

(a) $V = \text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$

(b) $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Kanta ja yksikäsitteisyys

Lause

Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vektoriavaruuden V kanta, jos ja vain jos jokainen avaruuden V vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla jonon vektoreiden lineaarikombinaationa.

Esimerkki

- Merkitään

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta.
- Avaruudella $\mathcal{P}_n$ on kanta $(1, x, \ldots, x^n)$.

Kertausta: dimensio

Määritelmä

Vektoriavaruuden dimensio on avaruuden kantavektorien lukumäärä.

Jos aliavaruus on esimerkiksi suora, sen dimensio on yksi. Tason dimensio puolestaan on kaksi.

Kuinka tunnistaa kanta helposti?

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka dimensio on n.

- Jos vektoriavaruuden V vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijono on vapaa ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.

Esimerkki

Halutaan osoittaa, että jono $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Riittää osoittaa toinen seuraavista:

(a) Jono virittää avaruuden.

(b) Jono on vapaa.

Vapaa jono voidaan jatkaa vektoriavaruuden kannaksi

Lause

Oletetaan, että V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Oletetaan lisäksi, että $S = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on avaruuden V vapaa jono. Tällöin jonoon S voidaan lisätä vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden V kanta.

Virittäjäjono voidaan lyhentää vektoriavaruuden kannaksi

Lause

Oletetaan, että jono $S = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ virittää avaruuden V. Tällöin jonosta S voidaan poistaa vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden V kanta.

Totta vai tarua?

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ ovat kuusi avaruuden $\mathbb{R}^5$ vektoria. Valitse seuraavissa tapauksissa oikea vaihtoehto.

(a) Vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ *virittävät avaruuden* $\mathbb{R}^5$ / *saattavat virittää avaruuden* $\mathbb{R}^5$ / *eivät viritä avaruutta* $\mathbb{R}^5$.

(b) Vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ *ovat* / *saattavat olla* / *eivät ole* lineaarisesti riippumattomia.

(c) Satunnaisesti valitut viisi vektoria vektoreista $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ *muodostavat aina kannan* / *saattavat muodostaa kannan* / *eivät koskaan muodosta kantaa* avaruudelle $\mathbb{R}^5$.

Kertausta: koordinaatit

Määritelmä

Olkoon $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in V$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan* $\mathcal{B}$ *suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \ldots, a_n$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n.$$

Esimerkki

Merkitään

$$\bar{v}_1 = (1, -2) \text{ ja } \bar{v}_2 = (-2, 1),$$
$$\bar{w}_1 = (1, 0) \text{ ja } \bar{w}_2 = (1, 1).$$

Nyt $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ ja $\mathcal{T} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja.

Tutkitaan vektorin $\bar{a} = (-1, -4)$ koordinaatteja näiden kantojen suhteen.

Esimerkki

Merkitään

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Voidaan osoittaa, että $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta.

Määritetään matriisin $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

Koordinaattivektori

Määritelmä

Jos vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat $a_1, \ldots, a_n$, vektorin $\bar{u}$ *koordinaattivektori* kannan $\mathcal{B}$ suhteen on

$$[\bar{u}]_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n).$$

Kannanvaihto

Ensi viikolla: Kuinka yhden kannan suhteen kirjoitetut koordinaattivektorit voi muuttaa toisen kannan suhteen kirjoitetuiksi koordinaattivektoreiksi?