Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

7.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Tehtävien viimeinen palautuspäivä muutettiin perjantaiksi.
- Muista pitää kurssimateriaalia (osa I ja II) mukana.
- Muista myös lukea kurssimateriaalia! Kaikkia asioita ei käydä läpi luennoilla.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.

(b) $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.

(c) On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

(d) Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(g) $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

- Aliavaruus on vektoriavaruus toisen vektoriavaruuden sisässä.
- Aliavaruus on yleistys vektoreiden virittämästä aliavaruudesta.

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudet

Esimerkki

Joukko

$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 2\}$$

koostuu korkeintaan astetta 2 olevista polynomeista. Se on polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus.

Tehtävä

Mitkä seuraavista osajoukoista ovat annetun vektoriavaruuden aliavaruuksia?

(a) Avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko

$$W = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{v} = \bar{0} \text{ tai } \|\, \bar{v} \,\| = 2\}$$

(b) Avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ osajoukko

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ osajoukko

$$W = \{p \in \mathcal{P} \mid p = ax + b, \text{ missä } ab = 0\}$$

Kertausta: vektoreiden virittämä aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V jokin vektoriavaruus. *Vektoreiden* $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$ *virittämä aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Vektoreiden virittämä aliavaruus on aliavaruus myös uuden määritelmän mukaan.

Esimerkki

Osoitetaan, että $W = \{(3a - b,\ b,\ a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

Esimerkki

Osoitetaan, että

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ b & c-a \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Matriisiavaruuden luonnolliset virittäjät

Vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ on seuraavien vektoreiden virittämä:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Polynomiavaruuden luonnolliset virittäjät

Polynomit 1, x ja x^2 virittävät polynomiavaruuden

$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 2\}.$$

Totta vai tarua?

(a) Polynomit $2x - 1$ ja x virittävät avaruuden

$$\mathcal{P}_1 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 1\}.$$

(b) On olemassa vektoriavaruus, jolla ei ole äärellistä virittäjäjoukkoa.

Tehtävä

Onko avaruus $\mathbb{R}^2$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?