Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

6.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Tehtävät voi palauttaa palautuslaatikkoon, joka on 3. kerroksen C-käytävällä lokerikon päällä. Tehtävät voi palauttaa myös luennolla tai ohjauksessa.
- Tavoitematriisista näet, mitä sinun pitäisi osata ja oppia.

Tiivistelmä

Vektoriavaruuden määritelmässä mainitut laskusäännöt pätevät muun muassa

- avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille
- matriiseille
- polynomeille.

Kyseiset laskusäännöt toteuttavaa rakennetta kutsutaan vektoriavaruudeksi ja sen alkioita vektoreiksi. **Sanalla vektori on siis uusi määritelmä.**

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.

(b) $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.

(c) On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

(d) Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(g) $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Funktioavaruus

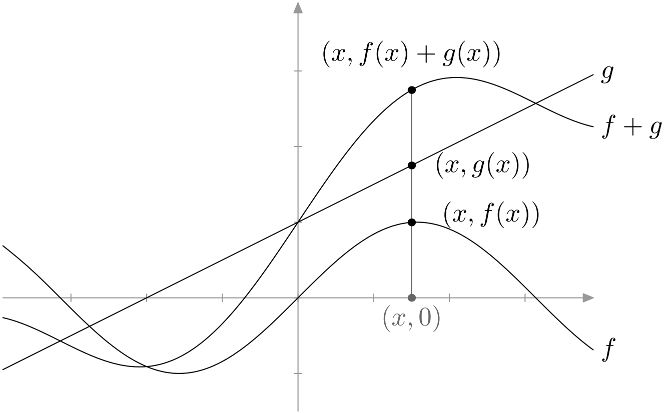
Vektoriavaruuden alkiot voivat olla kuvauksia.

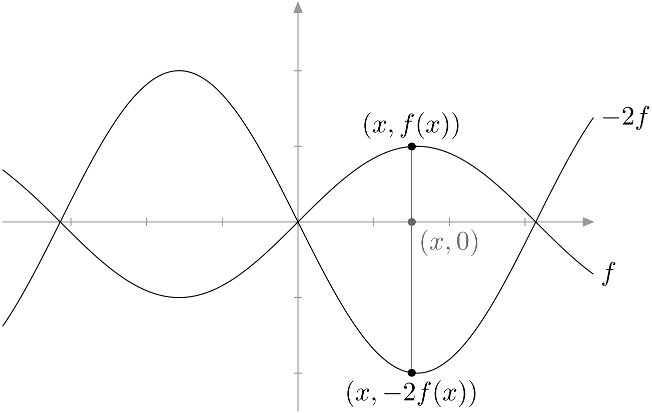
Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien kuvausten $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko.

Tarkastellaan sen alkioita

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x \quad \text{ja} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 0{,}5x + 1.$$

Määritetään funktiot $f + g$ ja $(-2)f$.


$(x, f(x) + g(x))$
g
$f + g$
$(x, g(x))$
$(x, f(x))$
$(x, 0)$
f


$-2f$
$(x, f(x))$
$(x, 0)$
f
$(x, -2f(x))$

Funktioavaruus

Jos $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin kuvaukset $f + g$ ja af määritellään seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
f + g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{ja} \\
af \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto af(x).
\end{aligned}
$$

Näillä laskutoimituksilla varustettuna $\mathcal{F}$ on vektoriavaruus.

Mikä on avaruuden $\mathcal{F}$ nollavektori?

Tehtävä

Tutkitaan tason yksikköympyrää

$$S = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \| \bar{v} \| \leq 1\}.$$

Onko S vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna ja skalaarikertolaskuna ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolasku?

Tehtävä

Mitkä seuraavista suorista ovat vektoriavaruuksia, kun yhteenlaskuna ja skalaarikertolaskuna ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolasku?

Milloin osajoukko on vektoriavaruus?

Halutaan tutkia, onko vektoriavaruuden osajoukko vektoriavaruus. Mitkä vektoriavaruuden ehtoja pitää tutkia?

Aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Lause

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on aliavaruus W. Tällöin myös aliavaruus W on vektoriavaruus.

Esimerkki

Osoitetaan, että joukko $W = \{(a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

Kertausta: vektoreiden virittämä aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V jokin vektoriavaruus. *Vektoreiden* $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$ *virittämä aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$