Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

5.8.2013

Avoin yliopisto
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Tehtävä

Tutkitaan 2×2-matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Onko olemassa matriisia $Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, jolle pätee $A + Y = A$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

(b) Oletetaan, että $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Etsi matriisi $B' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, jolle pätee $B + B' = Y$, missä Y on edellisessä kohdassa löydetty matriisi.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien laskusääntöjä

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja a, $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$

(b) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

(c) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(d) $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

(e) $c(\bar{v} + \bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$

(f) $(a + c)\bar{v} = a\bar{v} + c\bar{v}$

(g) $a(c\bar{v}) = (ac)\bar{v}$

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$

Sana ”vektori” saa nyt uuden, yleisemmän merkityksen.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0}$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v}$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Esimerkkejä vektoriavaruuksista

- Avaruus $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna on reaalilukujen yhteenlasku ja skalaarikertolaskuna reaalilukujen kertolasku.
- Vektorit voivat olla myös vaikkapa matriiseja. Kaikkien $m \times n$-matriisien joukko $\mathbb{R}^{m \times n}$ muodostaa vektoriavaruuden.

Vektoreiden ei tarvitse olla avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita!

Polynomiavaruus

Vektorit voivat olla polynomeja.

Esimerkiksi $-2x^5 - x^3 + 5x^2 + 4x$ on polynomi.

Reaalikertoiminen *polynomi* on muotoa

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

oleva summa, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Polynomeja voidaan laskea yhteen ja kertoa skalaareilla

Merkitään

$$p = 3x^2 - 4x + 10 \qquad \text{ja} \qquad q = -2x^5 - x^3 + 5x^2 + 4x.$$

Nyt $p + q = -2x^5 - x^3 + 8x^2 + 10$ ja
$(-3)p = -9x^2 + 12x - 30.$

Polynomiavaruus

Reaalikertoimiset polynomit muodostavat vektoriavaruuden. Tätä vektoriavaruutta merkitään symbolilla $\mathcal{P}$.

Mikä on polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ nollavektori? Entä mikä on vektorin $-4x^3 + x - 15$ vastavektori? Miten perustelet vastauksesi?

Esimerkki vektoriavaruudesta

Reaalilulukujen joukko $\mathbb{R}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna on reaalilukujen yhteenlasku ja skalaarikertolaskuna reaalilukujen kertolasku.

Esimerkki rakenteesta, joka ei ole vektoriavaruus

Tutkitaankonaislukujen joukkoa $\mathbb{Z}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla.

Se ei ole vektoriavaruus. Miksei?

Yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun täytyy olla määriteltyjä joukossa $\mathbb{Z}$.

Laskutoimituksia voi keksiä myös itse

Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ yhteenlasku $\boxplus$ ja skalaarikertolasku $\boxdot$ seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \boxplus y = x + y + 1 \quad \text{ja} \quad c \boxdot x = c(x+1) - 1.$$

- Laske $3 \boxdot (-4 \boxplus 2)$.
- Joukko $\mathbb{R}$ varustettuna yhteenlaskulla $\boxplus$ ja skalaarikertolaskulla $\boxdot$ on vektoriavaruus. Mikä on avaruuden nollavektori? Mikä on vektorin 3 vastavektori?

Laskutoimituksia ei voi määritellä miten tahansa

Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ skalaarikertolasku $*$ seuraavasti: jos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$c * (v_1, v_2) = (v_1, 0).$$

Joukko $\mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla $*$ **ei ole** vektoriavaruus.

Tiivistelmä

Vektoriavaruuden määritelmässä mainitut laskusäännöt pätevät muun muassa

- avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille
- matriiseille
- polynomeille.

Kyseiset laskusäännöt toteuttavaa rakennetta kutsutaan vektoriavaruudeksi ja sen alkioita vektoreiksi. **Sanalla vektori on siis uusi määritelmä.**