Johdatus lineaarialgebraan
Osa I

Jokke Häsä, Lotta Oinonen, Johanna Rämö

9. heinäkuuta 2013

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Sisältö

1 Avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektorit

Koulussa tason ja kolmiulotteisen avaruuden vektoreita käsiteltiin yleensä komponenttimuodossa. Eräs tason vektori saattoi olla vaikkapa $\bar{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$. Huomattiin, että jokaisella koordinaatiston pisteellä on paikkavektori, jonka komponentit ovat pisteen koordinaatit. Esimerkiksi pisteen $(3, -2)$ paikkavektori olisi edellä mainittu vektori $\bar{v}$.

Kun vektorin käsitettä yleistetään korkeampiin ulottuvuuksiin, osoittautuu helpommaksi käsitellä vektoreita ja avaruuden pisteitä samalla tavalla. Esimerkiksi merkintä $(3, -2)$ tulee tarkoittamaan sekä pistettä $(3, -2)$ että yllä määriteltyä vektoria $\bar{v}$. Tällöin voidaan myös luopua hieman kömpelöstä yksikkövektoreiden $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ käytöstä.

Tässä luvussa käsitellään tason ja kolmiulotteisen avaruuden vektoreita. Näitä avaruuksia kutsutaan nimillä $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$.

1.1 Kaksiulotteisen avaruuden vektorit

Määritelmä 1.1. Avaruus $\mathbb{R}^2$ koostuu reaalilukupareista. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ ja } b \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.

Huom. 1. Määritelmä tarkoittaa sopimusta. Tässä siis sovitaan, mitä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreilla tarkoitetaan. Määritelmää ei tarvitse perustella millään tavalla.

Huom. 2. Tarkalleen ottaen vektori (a, b) on niin kutsuttu *järjestetty pari*. Tämä tarkoittaa sitä, että lukujen a ja b järjestyksellä on väliä. Esimerkiksi järjestetty pari $(1, 2)$ ei ole sama kuin järjestetty pari $(2, 1)$.

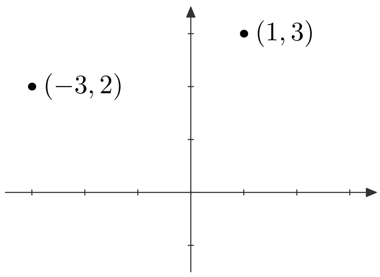
Huom. 3. Jos joukko-opin merkinnät (esim. $\in$, $\subset$, $\setminus$) eivät ole tuttuja, voit katsoa apua kurssisivulla olevasta tiedostosta ”Joukko-opin merkintöjä”.

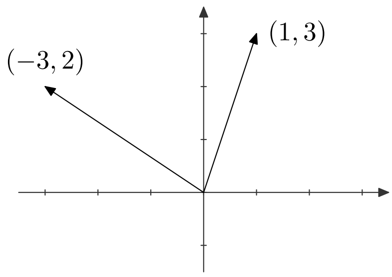
Vektoreita merkitään tässä tekstissä yleensä kirjaimella, jonka päällä on viiva. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa $\bar{v} = (a, b)$. Luvut a ja b ovat tällöin vektorin $\bar{v}$ *komponentteja*. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreissa on aina kaksi komponenttia, ja avaruutta $\mathbb{R}^2$ kutsutaan *kaksiulotteiseksi*.

Esimerkki 1.2. Esimerkiksi $\bar{v} = (4, -1)$ ja $\bar{u} = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{5}\right)$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita. Vektorin $\bar{v}$ komponentit ovat 4 ja -1. Vektorin $\bar{u}$ komponentit ovat puolestaan $\frac{1}{2}$ ja $-\sqrt{5}$.

Kaksiulotteisen avaruuden vektoreita voidaan havainnollistaa eri tavoin. Eräs tapa on ajatella vektorit koordinaatiston pisteinä. Vektoria (a, b) vastaa piste, jonka vaakakoordinaatti on a ja pystykoordinaatti b. Kuvassa 1.1 on esitetty vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat tason pisteet.

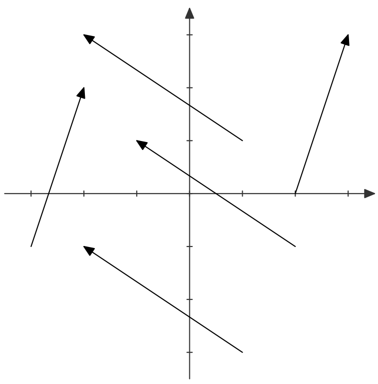
Vektoria (a, b) voi kuvata myös pisteen (a, b) paikkavektorina eli suuntajanana, jonka lähtöpiste on origo ja päätepiste (a, b). Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat paikkavektorit on myös esitetty kuvassa 1.1.





Kuva 1.1: Tason pisteet, jotka vastaavat vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$, sekä samoja vektoreita vastaavat paikkavektorit.

Pisteen ja paikkavektorin lisäksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoria voi havainnollistaa mistä tahansa pisteestä lähtevällä suuntajanana. Suuntajanan paikalla ei ole väliä. Ainoastaan sen suunta ja pituus merkitsevät. Vektoria (a, b) vastaavalla suuntajanalla on sama suunta ja pituus kuin pisteen (a, b) paikkavektorilla. Kuvassa 1.2 on esitetty vektoria $(1, 3)$ vastaavia suuntajanoja sekä vektoria $(-3, 2)$ vastaavia suuntajanoja.



Kuva 1.2: Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavia suuntajanoja.

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori on siis tällä kurssilla määritelmänsä mukaan kahdesta reaaliluvusta koostuva järjestetty pari. Vektoreita voidaan kuitenkin havainnollistaa pisteinä, paikkavektoreina tai suuntajanoina. Se, millainen havainnollistamistapa on paras, riippuu siitä, mitä ollaan tekemässä. Usein vektoreita käsiteltäessä on pystyttävä vaihtamaan sulavasti yhdestä esitystavasta toiseen.

Koulusta tutut tason yksikkövektorit ovat määritelmän mukaan $\bar{i} = (1, 0)$ ja $\bar{j} = (0, 1)$. Kyseisiä merkintöjä ei juurikaan käytetä tällä kurssilla.

1.2 Vektorien laskutoimitukset

Vektoreille voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia. Yhteenlasku tapahtuu lisäämällä kummankin yhteenlaskettavan vektorin komponentit yhteen.

Määritelmä 1.3. Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *summa* on vektori

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

Lisäksi vektoreita voidaan kertoa reaaliluvuilla. Tätä operaatiota kutsutaan *skalaarikertolaskuksi.*

Määritelmä 1.4. Jos $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$, määritellään

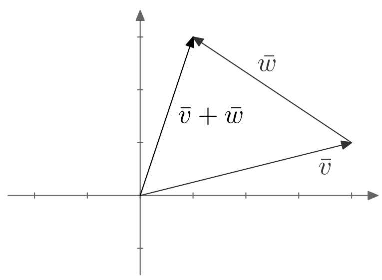
$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2).$$

Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan usein *skalaareiksi*, ja siitä johtuu myös skalaarikertolaskun nimitys.

Esimerkki 1.5. Tarkastellaan vektoreita $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Niiden summa on

$$\bar{v} + \bar{w} = (4 + (-3), 1 + 2) = (1, 3).$$

Yhteenlaskua voidaan havainnollistaa geometrisesti (ks. kuva 1.3). Vektorien summa nähdään asettamalla vektoreita vastaavat suuntajanat peräkkäin niin, että jälkimmäinen vektori alkaa siitä, mihin ensimmäinen päättyi. Summavektorin alkupiste on ensimmäisen vektorin alkupiste ja päätepiste jälkimmäisen vektorin päätepiste.



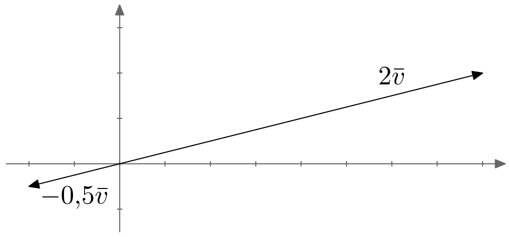
Kuva 1.3: Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ sekä niiden summa $\bar{v} + \bar{w}$.

Tutkitaan sitten skalaarikertolaskua. Määritelmän mukaan

$$2\bar{v} = (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = (8, 2)$$
$$\text{ja} \quad -\frac{1}{2}\bar{v} = \left(-\frac{1}{2} \cdot 4, -\frac{1}{2} \cdot 1\right) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

Vektorit $2\bar{v}$ ja $-\frac{1}{2}\bar{v}$ on piirretty kuvaan 1.4. Huomataan, että skalaarilla kertominen venyttää vektoria vastaavan suuntajanan pituutta, mutta säilyttää sen suunnan, kuitenkin niin, että negatiivisella skalaarilla kertominen kääntää suunnan vastakkaiseksi.

Määritelmä 1.6. Vektorille $(-1)\bar{v}$ käytetään merkintää $-\bar{v}$. Summalle $\bar{v} + (-\bar{w})$ puolestaan käytetään merkintää $\bar{v} - \bar{w}$. Tätä kutsutaan vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotukseksi.*

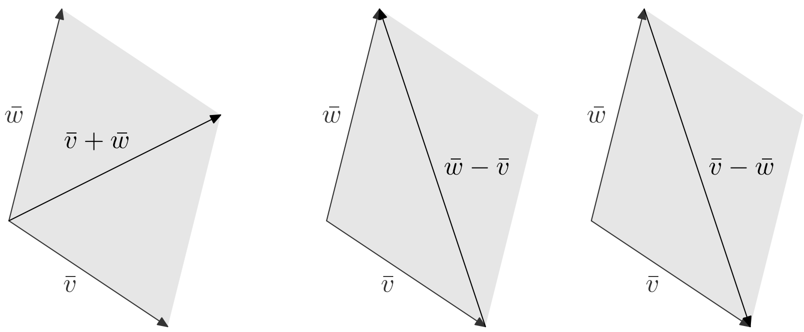


Kuva 1.4: Skalaarimonikerrat $2\bar{v}$ ja $-\frac{1}{2}\bar{v}$.

Esimerkiksi vektorien $(-1, 6)$ ja $(4, 2)$ erotus on

$$(-1, 6) - (4, 2) = (-1, 6) + (-1)(4, 2) = (-1, 6) + (-4, -2) = (-5, 4).$$

Vektorien erotuksen voi määrittää kuvan perusteella samaan tapaan kuin summan. Nyt vain jälkimmäisen vektorin suunta on käännettävä. Vektorien summaa ja erotusta on havainnollistettu kuvassa 1.5.



Kuva 1.5: Summa $\bar{v} + \bar{w}$ sekä erotukset $\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{w} - \bar{v}$.

1.3 Kolmiulotteinen avaruus

Kaikki edellä esitellyt käsitteet voidaan määritellä myös kolmiulotteisessa avaruudessa. Avaruus $\mathbb{R}^3$ on joukko

$$\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkioita nimitetään myös vektoreiksi. Niitä voidaan ajatella avaruuskoordinaatiston pisteinä, paikkavektoreina tai suuntajanoina. Yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään komponenteittain samalla tavalla kuin avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Kolmiulotteisen avaruuden yksikkövektorit ovat $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ ja $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Näitäkään merkintöjä ei jatkossa tulla juuri tarvitsemaan.

2 Avaruus $\mathbb{R}^n$

Edellisessä luvussa käsiteltiin avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektoreita eli reaalilukupareja ja reaalilukukolmikoita. Näitä avaruuksia voidaan yleistää määrittelemällä n-ulotteinen avaruus $\mathbb{R}^n$.

Määritelmä 2.1. Oletetaan, että $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiot ovat reaaliluvuista koostuvia n-jonoja. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi.*

Jos $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, niin lukuja $v_1, v_2, \dots, v_n$ kutsutaan vektorin $\bar{v}$ *komponenteiksi.* Sovimme, että ellei toisin mainita, vektorin $\bar{v}$ komponentteja merkitään symboleilla $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Yleisille n-ulotteisen avaruuden vektoreille määritellään laskutoimitukset samoin kuin kaksi- ja kolmiulotteisessa tapauksessa.

Määritelmä 2.2. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, \dots,\, v_n + w_n) \quad \text{ja} \\ c\bar{v} &= (cv_1,\, cv_2,\, \dots,\, cv_n). \end{aligned}$$

Ensimmäistä laskutoimitusta nimitetään vektorien *yhteenlaskuksi* ja toista *skalaarikertolaskuksi.*

Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan *skalaareiksi.* Jos $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$, vektoria $c\bar{v}$ nimitetään vektorin $\bar{v}$ *skalaarimonikerraksi.*

Huom. Ainoastaan samanulotteisen avaruuden vektoreita voi laskea yhteen.

Määritelmä 2.3. Vektorin $\bar{v}$ *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotus* on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$. Vektoria $(0, 0, \dots, 0)$ kutsutaan *nollavektoriksi.* Sille käytetään merkintää $\bar{0}$.

Esimerkki 2.4. Merkitään $\bar{v} = (-5, 3, 0, 1, -1)$ ja $\bar{w} = (-2, -4, 2, 3, 5)$. Tällöin $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^5$ vektoreita. Lasketaan vektorit $2\bar{v} - 3\bar{w}$ ja $-5\bar{v} - \bar{w}$:

$$\begin{aligned} 2\bar{v} - 3\bar{w} &= (-10, 6, 0, 2, -2) - (-6, -12, 6, 9, 15) = (-4, 18, -6, -7, -17) \\ -5\bar{v} - \bar{w} &= (25, -15, 0, -5, 5) - (-2, -4, 2, 3, 5) = (27, -11, -2, -8, 0). \end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille pätevät koulusta tutut laskusäännöt.

Lause 2.5. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee:*

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ *(vaihdannaisuus)*
2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ *(liitännäisyys)*
3. $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$
4. $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ *(osittelulaki)*
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ *(osittelulaki)*
7. $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$
8. $1\bar{v} = \bar{v}$.

Huom. Lause tarkoittaa väitettä, joka voidaan perustella todeksi nojautumalla määritelmiin ja aikaisemmin todeksi osoitettuihin väitteisiin.

Todistus. Todistetaan esimerkin vuoksi kohta 1 ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan kuten lauseessa, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, ja luvut $v_1, \ldots, v_n$ ja $w_1, \ldots, w_n$ ovat reaalilukuja. Jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $v_i + w_i = w_i + v_i$, koska reaalilukujen yhteenlasku on vaihdannainen. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned} \bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, \ldots,\, v_n + w_n) \\ &= (w_1 + v_1,\, w_2 + v_2,\, \ldots,\, w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}. \end{aligned}$$

Väite on todistettu. □

Tasovektorien yhteydessä todettiin, että skalaarikertolasku säilyttää (tai kääntää) vektorin suunnan. Otetaan tämä havainto yleisten vektorien yhdensuuntaisuuden määritelmäksi.

Määritelmä 2.6. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin merkitään $\bar{v} \parallel \bar{w}$.

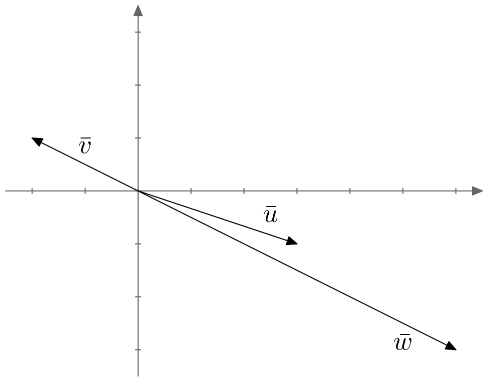
Esimerkki 2.7. Vektorit $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (6, -3)$ ovat yhdensuuntaiset, sillä $\bar{v} = -\frac{1}{3}\bar{w}$. Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u} = (3, -1)$ eivät puolestaan ole yhdensuuntaiset, mikä voidaan päätellä seuraavasti. Jos olisi olemassa $r \in \mathbb{R}$, jolle pätisi $\bar{v} = r\bar{u}$, niin täytyisi olla

$$\underbrace{(-2, 1)}_{\bar{v}} = r\,\underbrace{(3, -1)}_{\bar{u}} = (3r, -r).$$

Siispä $-2 = 3r$ ja $1 = -r$. Ensimmäisen yhtälön mukaan $r = -2/3$, mutta toisen yhtälön mukaan $r = -1$. Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua r, jolle pätee $\bar{v} = r\bar{u}$. Siten vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

Vektorit $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ on esitetty kuvassa 2.6.

Yhdensuuntaisuuden määritelmää voidaan myös yleistää ottamalla mukaan useampia vektoreita. Tällöin päädytään käsitteeseen, jota tarvitaan jatkossa hyvin monesti vektoriavaruuksien ominaisuuksia tutkittaessa.



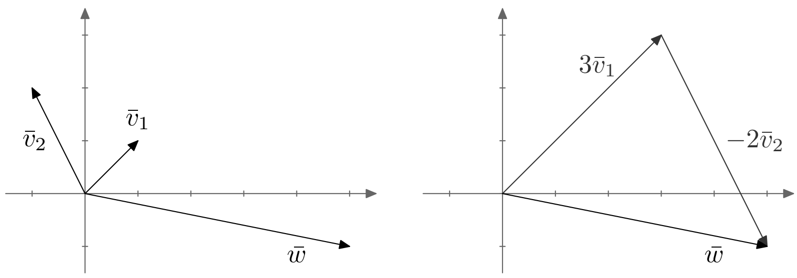
Kuva 2.6: Esimerkin 2.7 vektorit $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$.

Määritelmä 2.8. Vektori $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *lineaarikombinaatio* eli *lineaariyhdistelmä*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_k$, että

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k.$$

Esimerkki 2.9. Merkitään $\bar{v}_1 = (1,1)$, $\bar{v}_2 = (-1,2)$ ja $\bar{w} = (5,-1)$. Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio, sillä

$$\begin{aligned} 3\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 &= 3(1,1) - 2(-1,2) = (3,3) - (-2,4) \\ &= (5,-1) = \bar{w}. \end{aligned}$$



Kuva 2.7: Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio.

Edellisessä esimerkissä arvattiin, mitkä kertoimien a_1 ja a_2 pitää olla, jotta pätisi $\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2$. Myöhemmin esitellään keino kertoimien selvittämiseksi kaikissa mahdollisissa tilanteissa.

3 Suorat ja tasot

Tässä luvussa käsitellään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suoria ja tasoja vektoreiden näkökulmasta.

3.1 Suora

Havaitsimme skalaarikertolaskun tulkinnan yhteydessä, että jos $\bar{v}$ on mikä tahansa nollasta poikkeava tason $\mathbb{R}^2$ vektori ja t on jokin reaaliluku, niin vektori $t\bar{v}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{v}$ kanssa. Tällöin nähdään myös, että näitä vektoreita vastaavat koordinaatiston pisteet sijaitsevat samalla suoralla. Voidaan siis sanoa, että vektorijoukkoa

$$\{t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

vastaava pistejoukko muodostaa koordinaatiston suoran. Kullakin kertoimen t valinnalla saadaan jokin suoran pisteistä. Jos valitaan $t = 1$, saadaan alkuperäinen piste $\bar{v}$.

Kun edellä mainitussa esityksessä $t\bar{v}$ valitaan $t = 0$, saadaan nollavektori $\bar{0}$. Nollavektori on siis aina mukana muotoa (1) olevassa suorassa. Jos halutaan muodostaa vektoreista suora, joka ei kulje origon kautta, on origo ensin ”siirrettävä” haluttuun paikkaan. Tämä näkyy seuraavassa määritelmässä. Määritelmä toimii yhtä hyvin kaksi- kuin kolmiulotteisessakin avaruudessa.

Määritelmä 3.1. Olkoon $n = 2$ tai $n = 3$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suora* on joukko

$$\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Vektoria $\bar{p}$ kutsutaan suoran *paikkavektoriksi* ja vektoria $\bar{v}$ suoran *suuntavektoriksi*.

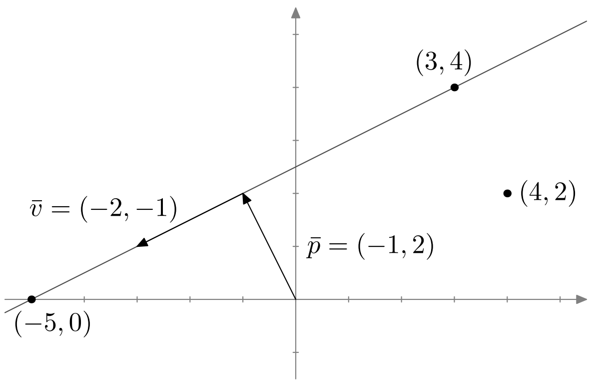
Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora. Jos $(a, b) \in S$, niin sanotaan, että piste (a, b) *on suoralla S* tai että suora *S kulkee pisteen (a, b) kautta*. Vastaavia ilmauksia käytetään avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Huom. Yllä ei ole annettu mitä tahansa suoran kuvailua, vaan suoran *määritelmä*. Emme siis ole lähteneet esimerkiksi jostakin suoran geometrisestä muotoilusta ja ilmaisseet saman asian vektoreilla, vaan määritelleet suoran käsitteen tämän kurssin tarpeita varten uudelleen.

Esimerkki 3.2. Esimerkiksi joukko

$$S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

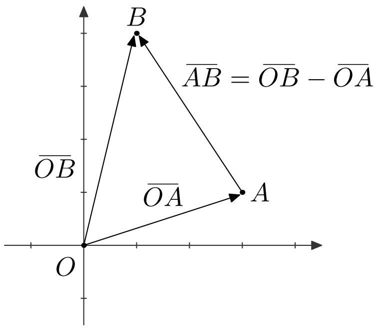
on suora. Se on piirretty kuvaan 3.8. Määritelmän mukaan mikä tahansa suoran S piste voidaan kirjoittaa summana vektorista $\bar{p} = (-1, 2)$ ja jostakin vektorin $\bar{v} = (-2, -1)$ skalaarimonikerrasta. Esimerkiksi $(-5, 0) = \bar{p} + 2\bar{v}$ ja $(3, 4) = \bar{p} - 2\bar{v}$, joten $(-5, 0) \in S$ ja $(3, 4) \in S$. Siis suora S kulkee pisteiden $(-5, 0)$ ja $(3, 4)$ kautta.



Kuva 3.8: Suora S avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Toisaalta piste $(4, 2)$ ei ole suoralla S. Jos nimittäin $(4, 2) = (-1, 2) + t(-2, -1)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, niin $4 = -1 - 2t$ ja $2 = 2 - t$. Ensimmäisen yhtälön perusteella $t = -5/2$ ja toisen perusteella $t = 0$. Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua $t \in \mathbb{R}$, jolle pätee $(4, 2) = (-1, 2) + t(-2, -1)$. Siispä $(4, 2) \notin S$.

Ryhdytään seuraavaksi määrittämään suoraa, joka kulkee annettujen pisteiden kautta. Sitä ennen otetaan käyttöön muutama merkintä. Oletetaan, että A ja B ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ pisteitä. Vektori $\overline{AB}$ on vektori, jota vastaavan suuntajanan alkupiste on A ja päätepiste on B (ks. kuva 3.9). Origoa on tapana merkitä kirjaimella O. Siten pisteen A paikkavektorille saadaan merkintä $\overline{OA}$.

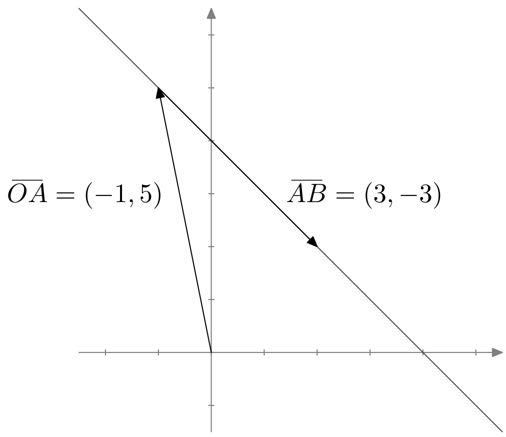


Kuva 3.9: Vektorit $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{AB}$.

Esimerkki 3.3. Tutkitaan, millainen on pisteiden $A = (-1, 5)$ ja $B = (2, 2)$ kautta kulkeva suora. Tätä varten tarvitaan suoralle paikkavektori. Paikkavektoriksi käy minkä tahansa suoran pisteen paikkavektori, esimerkiksi vektori $\overline{OA} = (-1, 5)$. Suuntavektoriksi käy mikä tahansa suoran suuntainen vektori, esimerkiksi vektori

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2, 2) - (-1, 5) = (3, -3).$$

Näin saadaan suora $\{(-1, 5) + t(3, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.



Kuva 3.10: Suora $\{(-1,5) + t(3,-3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Varmistutaan vielä siitä, että annetut pisteet A ja B todellakin ovat suoralla. Huomataan, että $(-1,5) = (-1,5) + 0 \cdot (3,-3)$ ja $(2,2) = (-1,5) + (3,-3)$. Siten pisteet A ja B ovat suoralla.

Vastaavalla menetelmällä on aina mahdollista määrittää kahden pisteen kautta kulkeva suora, vaikka asiaa ei sen tarkemmin tässä osoitetakaan.

Suoran paikka- ja suuntavektorit eivät ole yksikäsitteisiä, sillä sama suora voidaan kirjoittaa joukkona $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ usealla eri tavalla. Itse asiassa on mahdollista osoittaa, että

- vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita suoran minkä tahansa pisteen paikkavektori
- vektoriksi $\bar{v}$ voidaan valita mikä tahansa suoran suuntainen vektori.

Väitteitä ei todisteta tässä; todistukset voi halutessaan laatia hieman haastavampana harjoitustehtävänä.

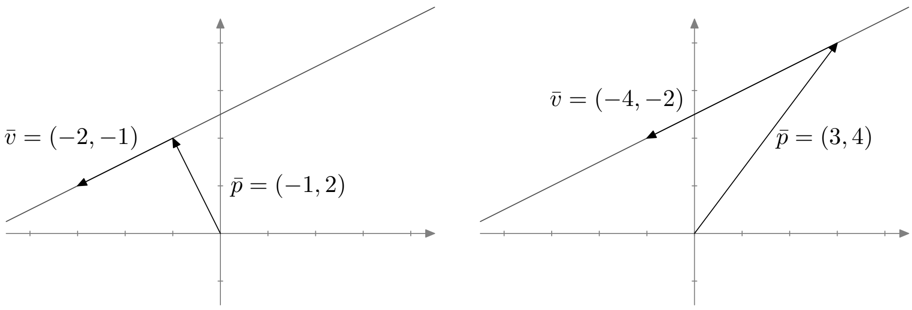
Esimerkki 3.4. Esimerkin 3.2 suoralle $S = \{(-1,2)+t(-2,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ on mahdollista valita paikkavektoriksi piste $(3,4)$ ja suuntavektoriksi vektori $(-4,-2)$. Tällöin S voidaan kirjoittaa muodossa

$$\{(3,4) + s(-4,-2) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Vaikka tämä joukko onkin äkkiseltään katsottuna erilainen kuin suoran S alkuperäinen määritelmä, on joukoissa täsmälleen samat alkiot. Asiaa on havainnollistettu kuvassa 3.11.

Osoitetaan vielä huolellisesti, että joukot $S = \{(-1,2) + t(-2,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja $S' = \{(3,4) + s(-4,-2) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ovat samat. Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.

"$\subset$": Osoitetaan ensin, että $S \subset S'$. Tämä tehdään näyttämällä, että jokainen joukon S alkio on joukossa S'. Oletetaan, että $\bar{a} \in S$. Joukon S määritelmän



Kuva 3.11: Suoran paikkavektori ja suuntavektori eivät ole yksikäsitteisiä.

perusteella pätee $\bar{a} = (-1, 2) + t(-2, -1)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (-1, 2) + t(-2, -1) = (-1, 2) + (-2 + 2 + t)(-2, -1)\\ &= (-1, 2) - 2(-2, -1) + (2 + t)(-2, -1)\\ &= (3, 4) + (2 + t)(-2, -1) = (3, 4) + \frac{2 + t}{2}(-4, -2).\end{aligned}$$

Koska $(2 + t)/2 \in \mathbb{R}$, viimeisestä muodosta nähdään, että $\bar{a} \in S'$. (Joukon S' määritelmässä voidaan valita $s = (2 + t)/2$.) On siis osoitettu, että $S \subset S'$.

"$\supset$": Osoitetaan sitten, että $S' \subset S$, eli näytetään, että jokainen joukon S' alkio on joukossa S. Oletetaan, että $\bar{a} \in S'$. Nyt $\bar{a} = (3, 4) + s(-4, -2)$ jollakin $s \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (3, 4) + s(-4, -2) = (3, 4) + (-4, -2) + (s - 1)(-4, -2)\\ &= (-1, 2) + (s - 1)(-4, -2) = (-1, 2) + 2(s - 1)(-2, -1).\end{aligned}$$

Koska $2(s - 1) \in \mathbb{R}$, nähdään, että $\bar{a} \in S$. Näin on osoitettu, että $S' \subset S$.

3.2 Taso

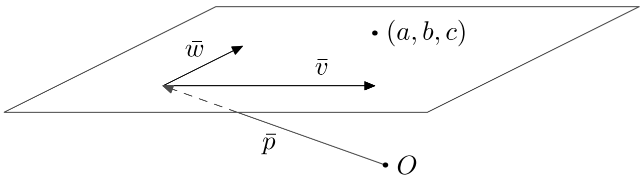
Kolmiulotteisessa avaruudessa voidaan määritellä tasot samaan tapaan kuin suorat. Nyt tarvitaan kuitenkin kahta suuntavektoria, ja näiden täytyy olla erisuuntaiset.

Määritelmä 3.5. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *taso* on joukko

$$\{\bar{p} + s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaiset. Vektoria $\bar{p}$ kutsutaan tason *paikkavektoriksi* ja vektoreita $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ tason *suuntavektoreiksi.*

Olkoon T avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso. Jos $(a, b, c) \in T$, niin sanotaan, että piste (a, b, c) *on tasossa* T tai että taso T *kulkee pisteen* (a, b, c) *kautta.* Tasoa ja siinä olevaa pistettä on havainnollistettu kuvassa 3.12.

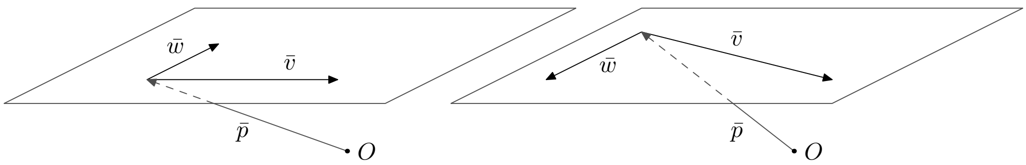


Kuva 3.12: Piste (a, b, c) on tasossa T.

Kuten suorien kohdalla voidaan tasojenkin tapauksessa osoittaa, että sama taso on mahdollista kirjoittaa usealla eri tavalla joukkona $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Tarkemmin sanoen

- vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita tason minkä tahansa pisteen paikkavektori
- vektoreiksi $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ voidaan valita mitkä tahansa tason suuntaisen vektorit, kunhan $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.13. Tarkka todistus jätetään jälleen (haastavaksi) harjoitustehtäväksi.



Kuva 3.13: Taso voidaan kirjoittaa eri tavoin joukkona $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Esimerkki 3.6. Määritetään pisteiden $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ ja $C = (-2, 0, 1)$ kautta kulkeva taso T. Valitaan ensin tason paikkavektori. Esimerkiksi tason pisteen A paikkavektori $\overline{OA} = (0, 1, 0)$ käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan tason suuntaiset suuntavektorit:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-1, 2, 2) \quad \text{ja} \quad \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-2, -1, 1).$$

Huomaa, että vektorit eivät ole yhdensuuntaiset, sillä $\overline{AB} \neq r\overline{AC}$ kaikilla nollasta poikkeavilla reaaliluvuilla r. (Tämä pitäisi tietysti todistaa täsmällisesti, mutta sivuutamme sen.) Näin saadaan taso

$$\begin{aligned} T &= \{\overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 1, 0) + s(-1, 2, 2) + t(-2, -1, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

4 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudet

Edellisessä luvussa käsittelimme avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suoria ja tasoja. Osoittautuu, että erityisesti origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat lineaarialgebran kannalta mielenkiintoisia. Tässä luvussa yleistämme tällaiset suorat ja tasot avaruuteen $\mathbb{R}^n$ ja tutkimme niin kutsuttuja aliavaruuksia.

Määritelmä 4.1. Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä *aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Vektoreiden virittämä aliavaruus koostuu siis kaikista vektoreiden lineaarikombinaatioista. Englannin kielen verbi ”span” tarkoittaa virittämistä tai ulottamista.

Esimerkki 4.2. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora

$$S = \{\bar{0} + t(-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

on vektorin $(-3,1)$ virittämä aliavaruus, eli $S = \operatorname{span}\big((-3,1)\big)$. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso

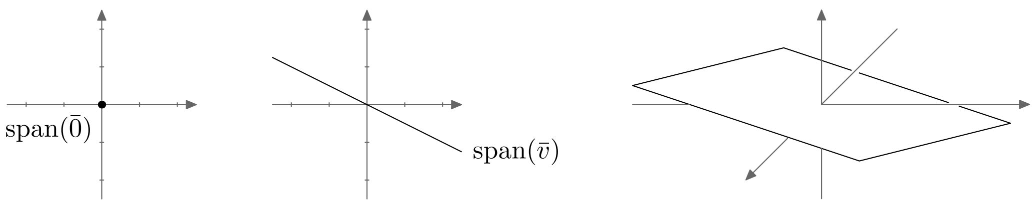
$$T = \{\bar{0} + t(-3,1,2) + s(2,2,0) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1,2) + s(2,2,0) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

taas on vektorien $(-3,1,2)$ ja $(2,2,0)$ virittämä aliavaruus, joten voidaan merkitä $T = \operatorname{span}\big((-3,1,2),(2,2,0)\big)$.

Tutkitaan hieman, millaisia aliavaruuksia voidaan virittää avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$. Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\operatorname{span}(\bar{0}) = \{a \cdot \bar{0} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\bar{0}\}$. Aliavaruudessa on siis ainoastaan nollavektori.

Oletetaan sitten, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ tai $\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}) = \{a\bar{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$ on vektorin $\bar{v}$ suuntainen suora. Tämän suoran paikkavektori on nollavektori, joten suora kulkee origon kautta.

Jos taas $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaisia, vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}, \bar{w}) = \{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on taso, joka kulkee origon kautta.



Kuva 4.14: Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\{\bar{0}\}$. Vektorin $\bar{v} \neq \bar{0}$ virittämä aliavaruus on origon kautta kulkeva suora. Kahden vektorin virittämä aliavaruus voi olla origon kautta kulkeva taso.

Aliavaruus yleistää siis origon kautta kulkevan suoran ja tason käsitteitä. Seuraava esimerkki osoittaa, miksi juuri origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat erityisen kiinnostavia.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan origon kautta kulkevaa suoraa

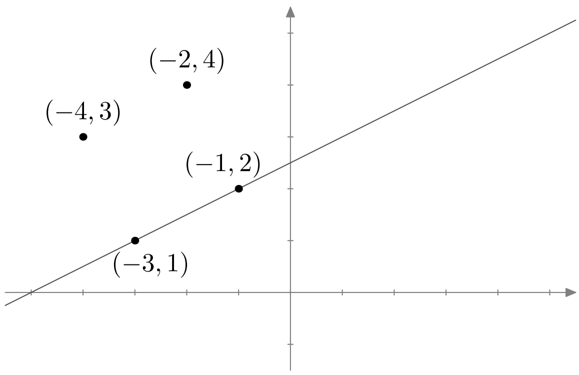
$$S = \mathrm{span}(\bar{v}) = \{t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$. Jos $\bar{w}$, $\bar{u} \in S$, niin $\bar{w} = a\bar{v}$ ja $\bar{u} = b\bar{v}$ joillakin a, $b \in \mathbb{R}$. Nyt $\bar{w} + \bar{u} = (a + b)\bar{v}$, joten summa $\bar{w} + \bar{u}$ on suoran S alkio. Lisäksi jos $c \in \mathbb{R}$, niin $c\bar{w} = c(a\bar{v}) = (ca)\bar{v}$. Siten kaikkien suoran S alkioiden skalaarimonikerrat ovat edelleen suoran S alkioita. Tavallaan suora S on oma pieni avaruutensa avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisässä, ja siellä voidaan laskea vektoreita yhteen ja kertoa niitä reaaliluvuilla. Sama pätee origon kautta kulkeviin tasoihin.

Tilanne on aivan toinen, jos suora tai taso ei kulje origon kautta. Tutkitaan vaikkapa esimerkin 3.2 suoraa

$$S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt esimerkiksi $(-1, 2)$ ja $(-3, 1)$ ovat suoralla S. Summa $(-1, 2) + (-3, 1) = (-4, 3)$ ei kuitenkaan ole suoralla S (ks. kuva 4.15). Myöskään skalaarimonikerta $2 \cdot (-1, 2) = (-2, 4)$ ei ole suoralla S.



Kuva 4.15: Esimerkin 3.2 suora S, joka ei ole aliavaruus.

Edellä tehdyt havainnot voidaan yleistää minkä tahansa vektoreiden virittämälle aliavaruudelle. Jos aliavaruuden kaksi vektoria lasketaan yhteen, on summa edelleen aliavaruudessa. Samoin aliavaruuden vektoreiden skalaarimonikerrat ovat aliavaruudessa. Lisäksi nollavektori kuuluu aina aliavaruuteen.

Lause 4.4. *Oletetaan, että* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$*. Olkoon* $W = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$*. Tällöin seuraavat väitteet pätevät:*

a) Jos $\bar{u}$*,* $\bar{w} \in W$*, niin* $\bar{u} + \bar{w} \in W$*.*

b) Jos $\bar{w} \in W$ *ja* $c \in \mathbb{R}$*, niin* $c\bar{w} \in W$*.*

c) $\bar{0} \in W$*.*

Todistus. Osoitetaan kohta a) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan, että $\bar{u}, \bar{w} \in W$. Nyt $\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$ joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$ joillakin $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{w} &= (a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k) + (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k) \\ &= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\bar{v}_k. \end{aligned}$$

Siten $\bar{u} + \bar{w} \in W$. □

Esimerkki 4.5. Tutkitaan, kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. On siis selvitettävä, onko olemassa reaalilukuja x_1, x_2, x_3, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}.$$

Toisin sanoen on pääteltävä, onko $\bar{w}$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio.

Sijoittamalla annetut vektorit yllä olevaan yhtälöön saadaan

$$x_1(0, -1, 2, 1) + x_2(2, 0, 1, -1) + x_3(4, 2, 2, 0) = (-2, 3, 2, -1)$$

ja laskemalla kerto- ja yhteenlaskut auki yhtälö voidaan vielä muuttaa muotoon

$$(2x_2 + 4x_3,\ -x_1 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2) = (-2, 3, 2, -1).$$

Kun tarkastellaan jokaista komponenttia erikseen, saatua vektoriyhtälöä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \phantom{-x_1 +{}} 2x_2 + 4x_3 &= -2 \\ -x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{cases}$$

Miten tällainen yhtälöryhmä ratkaistaan? Ennen kuin syvennymme enemmän vektoreiden virittämiin aliavaruuksiin, on syytä perehtyä yhtälöryhmien ratkaisemiseen.

5 Lineaariset yhtälöryhmät

Edellisen luvun lopun esimerkissä päädyttiin yhtälöryhmään, jonka ratkaisemisesta riippui, kuuluuko tietty vektori eräiden toisten vektorien virittämään aliavaruuteen. Tämäntyyppisiä tilanteita esiintyy lineaarialgebrassa jatkuvasti, ja kysymykset voivat olla hyvin monimuotoisia. Esimerkiksi mainitussa esimerkissä ei itse asiassa tarvittu yhtälöryhmän varsinaista ratkaisua, vaan oli ainoastaan osoitettava sen *olemassaolo*. Toisissa kysymyksissä olennaista saattaa olla, onko mahdollisia ratkaisuja yksi vai useampia. Joidenkin yhtälöryhmien kohdalla haluamme selvittää, minkälaisen aliavaruuden ratkaisut muodostavat.

Esimerkki 5.1. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -x + 2y \qquad = -1 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Kysymyksessä on niin sanottu lineaarinen yhtälöryhmä, koska yhtälöt ovat kaikki ensimmäisen asteen yhtälöitä. Yritetään ratkaista yhtälöryhmä eli löytää sellaiset luvut x, y ja z, että kaikki ryhmän yhtälöt toteutuvat yhtä aikaa.

Aloitetaan ratkaisemalla toisesta yhtälöstä x:

$$-x + 2y = -1 \iff x = 2y + 1.$$

Sijoitetaan sitten saatu x ensimmäiseen yhtälöön, ja ratkaistaan z:

$$3(2y + 1) + 2y + z = 1 \iff 6y + 3 + 2y + z = 1 \iff z = -8y - 2.$$

Sijoitetaan sitten sekä x että z kolmanteen yhtälöön, jotta voitaisiin ratkaista y:

$$2(2y + 1) + 4y - 8y - 2 = 0 \iff 4y + 2 + 4y - 8y - 2 = 0 \iff 0 = 0.$$

Päädyttiin tulokseen $0 = 0$. Miten tämä pitäisi tulkita? Onko ratkaisuja yksi vai useampia? Päteekö yhtälö ehkä kaikilla luvuilla? Selvästihän x ja z kuitenkin riippuvat y:stä, koska ne ratkaistiin yllä y:n lausekkeina. Mutta samalla tavoinhan y:n voitaisiin ajatella riippuvan x:stä ja z:sta. Vai olisiko sijoitus pitänyt tehdä jossain toisessa järjestyksessä?

Esimerkki osoittaa, että yhtälöryhmien monimutkaistuessa tarvitaan jokin järjestelmällinen menetelmä, jota käyttämällä sekä saadaan aina varmasti jokin vastaus että pystytään tulkitsemaan vastauksen merkitys. Tässä luvussa esiteltävä Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä redusoi minkä tahansa lineaarisen yhtälöryhmän sellaiseen muotoon, että kaikkiin (ainakin tällä kurssilla tarvittaviin) kysymyksiin voidaan helposti antaa vastaus.

5.1 Lineaarisen yhtälöryhmän määritelmä

Lineaarinen yhtälöryhmä on yhtälöryhmä, joka on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

missä $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Symbolit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat yhtälöiden *tuntemattomia.* Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi* ja lukuja $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *vakioiksi.* Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä symboleilla x, y, z ja niin edelleen.

Esimerkiksi

$$\begin{cases} -4x_1 & + & \sqrt{3}x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & + & \frac{6}{8}x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & \sqrt{2}x_2 & + & 11x_3 & = & -3 \\ & & -6x_2 & - & 32x_3 & = & 4 \end{cases}$$

on lineaarinen yhtälöryhmä.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään kaikki ne luvut, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat yhtä aikaa kaikki yhtälöt.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisen kannalta oleellista ovat vain kertoimien ja vakioiden arvot, esimerkiksi tuntemattomien nimityksellä ei ole merkitystä. Kaikki tieto yhtälöryhmästä voidaankin tiivistää lukutaulukkoon eli *matriisiin,* jossa luetellaan kaikki kertoimet sekä vakiot. Kun käsitellään yhtälöryhmien sijasta matriiseja, on kirjoitettavaa paljon vähemmän, sillä tuntemattomia ei tarvitse kirjata ylös.

Esimerkiksi edellä esitellyn yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & \sqrt{3} & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \frac{6}{8} & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 11 & -3 \\ 0 & -6 & -32 & 4 \end{array}\right].$$

Selkeyden vuoksi kertoimet on tapana erottaa vakioista pystyviivalla. Viivalla ei kuitenkaan ole matemaattista merkitystä. Huomaa, että matriisiin on kirjoitettava nolla niiden termien kohdalle, jotka puuttuvat yhtälöryhmästä. Kyseisten termien kertoimena on nimittäin nolla.

Kappaleessa 8 tutustutaan matriisien teoriaan yleisemmin. Tässä luvussa käsittelemme vain yhtälöryhmistä saatuja matriiseja.

5.2 Alkeisrivitoimitukset ja porrasmatriisit

Seuraavaksi käydään läpi menetelmä, jolla voidaan ratkaista mikä tahansa lineaarinen yhtälöryhmä. Ideana on muokata yhtälöryhmästä uusia yhtälöryhmiä, joilla on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä. Viimeisenä saatu yhtälöryhmä on sellaisessa muodossa, josta sen ratkaisuja koskeviin kysymyksiin on helppo vastata. Koska viimeisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat samat kuin alkuperäisen yhtälöryhmän, myös alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisut ja niiden luonne tunnetaan.

Määritelmä 5.2. Yhtälöryhmiä kutsutaan *ekvivalenteiksi*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

Ryhdymme muokkaamaan yhtälöryhmiä niin kutsutuilla alkeisrivitoimituksilla. Niiden avulla tuotetaan uusia yhtälöryhmiä, jotka ovat ekvivalentteja alkuperäisen yhtälöryhmän kanssa. Koska matriisien käsitteleminen on helpompaa kuin yhtälöryhmien, tehdään alkeisrivitoimitukset suoraan matriiseille.

Määritelmä 5.3. Seuraavat kolme operaatiota ovat *alkeisrivitoimituksia*:

1) Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.
2) Kerrotaan jokin rivi nollasta poikkeavalla reaaliluvulla.
3) Lisätään johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Alkeisrivitoimituksille käytetään tässä materiaalissa seuraavia lyhennysmerkintöjä

- $R_i \leftrightarrow R_j$: vaihdetaan rivien i ja j paikat $(i \neq j)$.
- aR_i: kerrotaan rivi i luvulla $a \neq 0$.
- $R_i + bR_j$: lisätään riviin i rivi j luvulla b kerrottuna $(i \neq j)$.

Esimerkki 5.4. Seuraavassa on annettu esimerkit erilaisista alkeisrivitoimituksista:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Määritelmä 5.5. Matriisi A on *riviekvivalentti* matriisin B kanssa, jos B saadaan matriisista A alkeisrivitoimituksilla.

Esimerkiksi edellisen esimerkin matriisit

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \quad \text{ja} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

ovat riviekvivalentit. Alkeisrivitoimituksia voidaan ajatella tehtävän myös nolla kappaletta. Siten jokainen matriisi on itsensä kanssa riviekvivalentti.

Lause 5.6. *Jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit.*

Lause voidaan muotoilla myös toisin: jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmillä on täsmälleen samat ratkaisut. Alkeisrivitoimituksen tekeminen ei siis muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Lauseen todistus on esitetty luvun lopussa.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{alkeisrivi-}\\ \cdots \\ \text{toimituksia}\end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{c}\text{samat}\\ \text{ratkaisut}\end{array} \longrightarrow \begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Kuva 5.16: Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän perusta.

Yhtälöryhmää ratkaistaessa on tavoitteena muuttaa yhtälöryhmän matriisi alkeisrivitoimituksilla niin kutsutuksi redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut on helppo lukea. Määritellään ensin porrasmatriisi.

Määritelmä 5.7. Matriisi on *porrasmatriisi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) mahdolliset nollarivit ovat alimpina
2) kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio, ns. *johtava alkio*, on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat porrasmatriiseja. Niiden johtavat alkiot on lihavoitu.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{14} & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & -41 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Porrasmuoto auttaa jo yhtälöryhmän ratkaisemisessa, mutta se ei ole tietyssä mielessä yksikäsitteinen. Tarkemmin sanoen kutakin matriisia vastaa useampi kuin yksi sen kanssa riviekvivalentti porrasmatriisi. Kun alkeisrivitoimituksia käytetään lisää, päädytään lopulta alkuperäistä matriisia vastaavaan redusoituun muotoon, joka on kullekin matriisille yksikäsitteinen.

Määritelmä 5.8. Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) matriisi on porrasmatriisi
2) jokaisen rivin johtava alkio on 1
3) jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat redusoituja porrasmatriiseja. Johtavat ykköset on jälleen lihavoitu.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & -53 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esimerkki 5.9. Matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

on redusoitu porrasmatriisi. Sitä vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Huomataan, että matriisista näkyy suoraan yhtälöryhmän ratkaisu.

5.3 Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Tavoitteena on muuttaa yhtälöryhmän matriisi alkeisrivitoimitusten avulla redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut näkyvät suoraan. Voidaan osoittaa, että mikä tahansa matriisi voidaan muuttaa tällä tavoin redusoiduksi porrasmatriisiksi ja että alkeisrivitoimitusten käyttämisjärjestys ei vaikuta tulokseen. Seuraava esimerkki näyttää, kuinka tämä tehdään.

Esimerkki 5.10. Muutetaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

redusoiduksi porrasmatriisiksi. Aloitetaan ensimmäisestä sarakkeesta. Vaihtamalla ensimmäisen ja toisen rivin paikat, saadaan ensimmäisen rivin johtavaksi alkioksi 1:

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen johtavan alkion alla olevat alkiot on helppo muuttaa nolliksi. Vähennetään ensin toisesta rivistä ensimmäinen rivi luvulla 2 kerrottuna:

$$\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten kolmanteen riviin ensimmäinen rivi luvulla 1 kerrottuna:

$$\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Nyt ensimmäinen sarake on halutussa muodossa. Siirrytään muokkaamaan toista saraketta. Muutetaan ensin sen johtava alkio ykköseksi, jotta voidaan toimia samoin kuin edellä. Kerrotaan siis toinen rivi luvulla -1. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{-1\cdot R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Toisen rivin johtavan alkion avulla voidaan muuttaa sen alla oleva alkio nollaksi. Lisätään kolmanteen riviin toinen rivi luvulla 2 kerrottuna. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{R_3+2R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{bmatrix},$$

joka on porrasmatriisi.

Jatketaan muokkaamista niin, että saadaan aikaan redusoitu porrasmatriisi. Muutetaan ensin viimeinenkin johtava alkio ykköseksi:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Muutetaan alimman rivin johtavan alkion avulla kaikki kolmannen sarakkeen muut alkiot nolliksi:

$$\xrightarrow{R_2-R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Näin saatu matriisi on redusoitu porrasmatriisi.

Saatu redusoitu porrasmatriisi on eri matriisi kuin se, josta lähdettiin liikkeelle. Matriisit myös vastaavat erilaisia yhtälöryhmiä. Näillä yhtälöryhmillä on kuitenkin samat ratkaisut lauseen 5.6 nojalla.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen Gaussin–Jordanin menetelmää käyttäen sisältää seuraavat vaiheet:

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Esimerkki 5.11. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Tämä matriisi muutettiin redusoiduksi porrasmatriisiksi esimerkissä 5.10:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Redusoitua porrasmatriisia vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Koska alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat lauseen 5.6 nojalla samat kuin lopuksi saadun yhtälöryhmän, on yhtälöryhmä ratkaistu. Sen ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Esimerkki 5.12. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & 8 \\ -3x - 6y - 3z & = & -21 \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmän matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -3 & -6 & -3 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+3R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ \qquad\quad 0=3. \end{cases}$$

Alin yhtälö on aina epätosi, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Esimerkki 5.13. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2-15x_3 &=& 9 \\ \quad x_1 \qquad\quad -2x_3 &=& 1 \\ \quad 2x_1-x_2-x_3 &=& 0 \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmän matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & -15 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1\cdot R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Saatua matriisia vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1-2x_3=1 \\ \; x_2-x_3=2 \\ \qquad\;\; 0=0 \end{cases}$$

Alin yhtälö $0=0$ on aina tosi. Se ei siis anna ratkaisujen kannalta mitään informaatiota. Tuntemattomalle x_3 ei puolestaan aseteta mitään rajoitteita, joten se voi olla mikä tahansa reaaliluku. Sanotaan, että x_3 on *vapaa muuttuja.* Merkitään $x_3=t$, missä $t\in\mathbb{R}$.

Ratkaistaan vielä muut tuntemattomat. Ensimmäinen yhtälö on $x_1-2t=1$, joten $x_1=1+2t$. Toinen yhtälö puolestaan on $x_2-3t=2$ eli $x_2=2+3t$. Siten yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1=1+2t \\ x_2=2+3t \\ x_3=t \end{cases} \qquad \text{missä } t\in\mathbb{R}.$$

Ratkaisuja on siis äärettömän monta. Esimerkiksi $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ ja $x_3 = 1$ sekä $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = -1$ ovat yhtälöryhmän ratkaisuja. Jokaisella reaaliluvulla t yhtälöryhmälle saadaan eri ratkaisu.

Yhtälöryhmässä saattaa olla useitakin vapaita muuttujia. Nämä löytyvät redusoidussa porrasmatriisissa niistä sarakkeista, joissa ei ole lainkaan johtavaa alkiota.

Esimerkki 5.14. Lineaarisen yhtälöryhmän matriisi muutettiin alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Mikä on yhtälöryhmän ratkaisu?

Havaitaan, että johtavat alkiot ovat sarakkeissa 1, 3 ja 6. Muita sarakkeita vastaavat tuntemattomat x_2, x_4 ja x_5 ovat vapaita muuttujia. Merkitään $x_2 = r$, $x_4 = s$ ja $x_5 = t$, missä r, s, $t \in \mathbb{R}$.

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} x_1 + 3r + 4s = 7 \\ \qquad\quad x_3 + 2s = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_6 = 3 \end{cases}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_3 = -2s \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s \\ x_4 = s \\ x_5 = t \\ x_6 = 3 \end{cases} \qquad \text{missä } r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Luvut r, s ja t voidaan valita täysin vapaasti, ja jokainen valinta tuottaa yhtälöryhmän ratkaisun.

Redusoidun porrasmatriisin tulkinta

Edelliset esimerkit kuvaavat tilanteita, joihin Gaussin–Jordanin menetelmää käyttäen voidaan päätyä. Kootaan vielä yhteen redusoidun porrasmatriisin M merkitys sitä vastaavan yhtälöryhmän kannalta eri tapauksissa.

- Jos jokin matriisin M viimeisistä riveistä on muotoa $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$ (eli rivin johtava ykkönen on pystyviivan oikealla puolella), kyseistä riviä vastaa epätosi yhtälö $0 = 1$. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
- Oletetaan, että edellinen tapaus ei toteudu. Jos joltakin matriisin M sarakkeelta puuttuu johtava alkio (pystyviivan vasemmalta puolelta), tuota saraketta vastaava muuttuja on vapaa. Yhtälöryhmän ratkaisut voidaan esittää vapaiden muuttujien avulla. Kunkin vapaan muuttujan arvo voidaan valita vapaasti, joten yhtälöryhmällä on ratkaisuja ääretön määrä.
- Oletetaan, että edelliset tapaukset eivät toteudu. Tällöin matriisin M jokaisessa sarakkeessa oikeanpuoleisinta lukuunottamatta on johtava alkio, ja yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen.

Esimerkki 5.15. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = -2\,. \end{cases}$$

Tutkitaan, miten luvun k arvot vaikuttavat ratkaisujen lukumäärään. Ryhdytään muuttamaan yhtälöryhmän matriisia redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - kR_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right]$$

Kaikki alkeisrivitoimitukset voidaan tähän asti tehdä riippumatta siitä, mikä luku k on. Jatkaminen ei kuitenkaan onnistu, sillä toisen rivin alkio $k-1$ saattaa olla nolla, samoin kolmannen rivin alkio $2-k-k^2$. Tarkastellaan näitä tapauksia erikseen.

Oletetaan ensin, että kolmannen rivin alkio $2-k-k^2 = 0$ eli $k = -2$ tai $k = 1$.

- Jos $k = -2$, viimeinen matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö $0 = 0$ on aina tosi. Lisäksi tuntematonta x_3 vastaavassa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota, joten x_3 on vapaa muuttuja. Ratkaisuja on siten äärettömän monta.

- Jos $k = 1$, viimeinen matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

  Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö $0 = -3$ on aina epätosi. Siten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Oletetaan sitten, että toisen rivin alkio $k - 1 = 0$ eli $k = 1$. Tämä tapaus käsiteltiin sattumalta jo edellä.

Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta, jossa sekä toisen rivin alkio $k - 1$ että kolmannen rivin alkio $2 - k - k^2$ ovat nollasta poikkeavia. Tällöin voidaan jatkaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Koska $k - 1 \neq 0$ ja $2 - k - k^2 \neq 0$ saadaan

$$\xrightarrow{\frac{1}{k-1}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2-k-k^2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2-k}{2-k-k^2} \end{array}\right].$$

Tällöin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Päädyttiin siis seuraavaan tulokseen: Yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, jos ja vain jos $k = -2$. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, jos ja vain jos $k = 1$. Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, jos ja vain jos $k \neq 1$ ja $k \neq -2$.

Geometrinen tulkinta

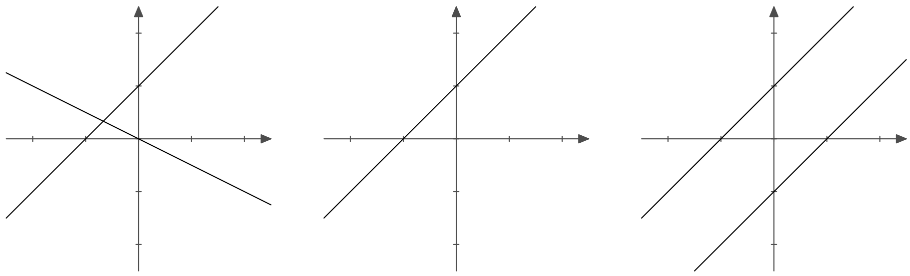
Yhtälöryhmällä voi siis olla täsmälleen yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua. Kun muuttujia on kaksi tai kolme, tilannetta voi havainnollistaa analyyttisen geometrian avulla. Tutkitaan yhtälöparia

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Oletetaan, että yhtälöllä on ratkaisu $x = r$, $y = s$. Sitä voidaan ajatella tason pisteenä (r, s). Koska ratkaisu toteuttaa ensimmäisen yhtälön, piste (r, s) on suoralla, jonka yhtälö on $ax + by = c$. Samoin piste (r, s) on suoralla, jonka yhtälö on $dx + ey = f$. Piste (r, s) on siis molemmilla suorilla, eli se on suorien leikkauspiste.

Jos yhtälöt määrittävät kaksi erisuuntaista suoraa, on niillä on täsmälleen yksi leikkauspiste. Tällöin yhtälöparilla on täsmälleen yksi ratkaisu. Jos yhtälöt määrittävät saman suoran, on leikkauspisteitä äärettömän monta. Silloin ratkaisujakin on äärettömän monta. Jos yhtälöiden määrittämät suorat eivät ole samat mutta ovat kuitenkin yhdensuuntaiset, ei leikkauspisteitä ole. Silloin ei myöskään yhtäläparilla ole ratkaisuja.

Kun muuttujia on kolme, yhtälöt kuvaavat tasoja. Esimerkiksi kolmen tason leikkausjoukko voi olla piste, suora tai taso. Nämä vastaavat tilanteista, joissa ratkaisuun tulee nolla, yksi tai kaksi vapaata muuttujaa. Leikkausjoukko voi olla myös tyhjä, jolloin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.



Kuva 5.17: Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua.

Huomioita porrasmatriiseista

Redusoidut porrasmatriisit ovat teoreettisesti mielenkiintoisia, koska jokaista matriisia vastaa täsmälleen yksi redusoitu porrasmatriisi. Yhtälöryhmää ratkaistaessa voitaisiin kuitenkin pysähtyä jo porrasmatriisivaiheeseen, sillä kaikki tulkinnat voidaan tehdä myös siitä.

Esimerkin 5.13 yhtälöryhmää vastaava porrasmatriisi oli

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Koska kolmannessa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota, sitä vastaava muuttuja on vapaa. Tähän havaintoon ei tarvita redusoitua porrasmuotoa. Jos merkitään $x_3 = t$, muut muuttujat voidaan ratkaista t:n avulla. Toisen rivin perusteella

$$x_2 - 3t = 2 \iff x_2 = 2 + 3t,$$

ja tämän jälkeen ensimmäisen rivin perusteella

$$x_1 + x_2 - 5t = 3 \iff x_1 + (3t + 2) - 5t = 3 \iff x_1 = 1 + 2t.$$

Porrasmatriisi siis riittää yhtälöryhmän ratkaisemiseen.

Historiallinen huomautus. Gauss ei itse kehittänyt nimeään kantavaa menetelmää, vaan sen tunsi jo ainakin Newton sata vuotta aikaisemmin 1600-luvun loppupuolella. Kiinalaiset puolestaan tunsivat menetelmän jo toisella vuosisadalla eKr. Nimitys ”Gaussin eliminointimenetelmä” tuli käyttöön kuitenkin vasta 1950-luvulla. Tällä nimityksellä tarkoitetaan yleensä nimenomaan porrasmatriisiin tähtäävää menetelmää, ja mikäli halutaan jatkaa redusoituun porrasmatriisiin asti, menetelmää kutsutaan ”Gaussin–Jordanin eliminoinniksi”. Jordan esitti tämän version eliminointimenetelmästä vuonna 1887.

5.4 Yhtälöryhmien ekvivalenssin todistus

Käydään vielä lopuksi todistus sille, että yhtälöryhmillä on samat ratkaisut, jos niiden matriisit ovat riviekvivalentit (lause 5.6).

Lauseen 5.6 todistus. Osoitetaan, että jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit. Tätä varten riittää näyttää, että alkeisrivitoimituksen tekeminen ei vaikuta yhtälöryhmän ratkaisuihin. Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \tag{2}$$

missä $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.

1. Ensinnäkin huomataan, että yhtälöryhmän rivien järjestyksellä ei ole väliä. Siten kahden rivin paikkojen vaihtaminen ei muuta yhtälöryhmän ratkaisuja.

2. Tutkitaan sitten alkeisrivitoimitusta, joka kertoo rivin i luvulla $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tuloksena on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ ca_{i1}x_1 & + & ca_{i2}x_2 & + & \cdots & + & ca_{in}x_n & = & cb_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{3}$$

On osoitettava, yhtälöryhmillä (2) ja (3) on samat ratkaisut. Tämä tehdään kahdessa osassa. Ensin näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (2) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (3) ratkaisu. Sitten näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (3) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu.

Oletetaan ensin, että $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$ on yhtälöryhmän (2) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (3) ratkaisu. Oletuksen perusteella pätee

$$\begin{cases} a_{11}r_1 & + & a_{12}r_2 & + & \cdots & + & a_{1n}r_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}r_1 & + & a_{i2}r_2 & + & \cdots & + & a_{in}r_n & = & b_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}r_1 & + & a_{m2}r_2 & + & \cdots & + & a_{mn}r_n & = & b_m. \end{cases}$$

Kun i:nnen yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla c, saadaan yhtälö

$$ca_{i1}r_1 + \cdots + ca_{in}r_n = cb_i.$$

Nyt siis $x_1 = r_1, \dots x_n = r_n$ toteuttaa yhtälöryhmän (3), ja siten se on myös yhtälöryhmän (3) ratkaisu.

Oletetaan sitten, että $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$ on yhtälöryhmän (3) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (2) ratkaisu. Nyt siis

$$\begin{cases} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \cdots & + & a_{1n}s_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ ca_{i1}s_1 & + & ca_{i2}s_2 & + & \cdots & + & ca_{in}s_n & = & cb_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}s_1 & + & a_{m2}s_2 & + & \cdots & + & a_{mn}s_n & = & b_m. \end{cases}$$

Koska $c \neq 0$, voidaan i:nnen yhtälön molemmat puolet jakaa luvulla c. Tällöin saadaan yhtälö $a_{i1}s_1 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$. Nyt nähdään, että $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$ toteuttaa myös yhtälöryhmän (2), joten se on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu. Siten yhtälöryhmillä on samat ratkaisut.

3. Kolmannen alkeisrivitoimituksen tarkastelu jätetään lukijalle.

$\square$

6 Virittäminen

Edellisessä luvussa opittiin vastaaamaan erilaisiin lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuja koskeviin kysymyksiin. Hyödynnetään näitä tietoja nyt avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksien tutkimiseen. Palautetaan mieleen, että vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä aliavaruus on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt osaamme vastata esimerkissä 4.5 esitettyyn kysymykseen. Esimerkissä haluttiin tietää, kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Tällöin päädyttiin yhtälöryhmään

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & & & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & -1. \end{array} \end{cases}$$

Kysymys siitä, kuuluuko $\bar{w}$ aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, on muutettu kysymykseksi, onko kyseisellä yhtälöryhmällä ratkaisuja. Kun yhtälöryhmää käsitellään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä, nähdään, että ratkaisuja ei ole. Siten $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Kutakin virittäjävektorien joukkoa vastaa niiden virittämä aliavaruus. Toisinaan on annettu aliavaruus, ja halutaan tietää, virittävätkö jotkin tietyt vektorit sen. Erityisesti voidaan kysyä, virittävätkö jotkin annetut vektorit koko vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$. Tutkitaan näitä kysymyksiä seuraavissa esimerkeissä.

Esimerkki 6.1. Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että vektorit $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ virittävät koko avaruuden $\mathbb{R}^2$ eli että

$$\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2.$$

Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko. Tiedetään, että jokainen joukon $\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ vektori on avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori, joten on selvää, että $\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$. Näin ollen riittää näyttää, että $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. On siis osoitettava, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori voidaan esittää vektoreiden $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ lineaarikombinaationa.

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\bar{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2.$$

Koska $\bar{v}$ voidaan kirjoittaa yllä olevassa muodossa, nähdään, että $\bar{v} \in \operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Siispä $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, joten on osoitettu, että $\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2$.

Esimerkki 6.2. Tutkitaan, millä ehdolla vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kuuluu vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (3, 2, -1), \quad \bar{v}_2 = (2, -2, 6) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (3, 4, -5)$$

virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Jotta vektori $\bar{w}$ olisi vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, täytyy olla olemassa luvut x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}.$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = w_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = w_2 \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 = w_3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisista saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -6 & 5 & -w_3 \\ 0 & 10 & -6 & w_2 + 2w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 - 2w_2 - w_3 \end{array}\right]$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = w_1 - 2w_2 - w_3$ on tosi eli $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$. Siten vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ on aliavaruudessa $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, jos ja vain jos $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$.

Nyt aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ voidaan kirjoittaa uudessa muodossa:

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 - 2w_2 - w_3 = 0\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_3 = w_1 - 2w_2\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_1 - 2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(w_1, 0, w_1) + (0, w_2, -2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{w_1(1, 0, 1) + w_2(0, 1, -2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Kyseessä on siis vektorien $(1, 0, 1)$ ja $(0, 1, -2)$ virittämä aliavaruus. Toisin sanottuna

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \operatorname{span}\big((1, 0, 1), (0, 1, -2)\big).$$

Eri vektorit voivat siis virittää saman aliavaruuden. Edes virittäjävektorien määrän ei tarvitse olla sama.

Esimerkki 6.3. Tutkitaan, virittävätkö vektorit

$$\bar{u}_1 = (1, 1, 0), \quad \bar{u}_2 = (1, 0, 1), \quad \bar{u}_3 = (0, 1, 1) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_4 = (-2, 1, 1)$$

avaruuden $\mathbb{R}^3$. Oletetaan, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. On selvitettävä, onko olemassa lukuja $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 = \bar{w}.$$

Saadaan yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Tästä saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(w_3 + w_2 - w_1) \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, olivatpa w_1, w_2 ja w_3 mitä lukuja tahansa. Siten $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$. Näin ollen $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$.

Edellisen esimerkin virittäjät $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ eivät ole parhaat mahdolliset. Koska yhtälöryhmässä on vapaita muuttujia, on yhtälöryhmällä äärettömän monta ratkaisua. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkiot voidaan siis kirjoittaa *usealla* eri tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Esimerkiksi jos $\bar{w} = (1, 2, 3)$, niin ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 2 - 2t \\ x_4 = t \end{cases} \qquad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Valitsemalla $t = 3$ saadaan

$$(1, 2, 3) = 3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - 4\bar{u}_3 + 3\bar{u}_4$$

ja toisaalta valitsemalla $t = 1$ saadaan

$$(1, 2, 3) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3 + \bar{u}_4.$$

Tämä ei ole toivottavaa, vaan tavoitteena on löytää sellainen virittäjäjoukko, että aliavaruuden vektorit voidaan ilmaista virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Tällaisia virittäjäjoukkoja tutkitaan seuraavassa luvussa.

7 Vapaus

Kuten edellisen luvun lopussa mainittiin, seuraavaksi pyritään ratkaisemaan, onko annetussa aliavaruuden virittäjäjoukossa tarpeettomia vektoreita. Jos tällaisia ei ole, virittäjäjoukkoa kutsutaan vapaaksi.

7.1 Vapauden määritelmä

Määritelmä 7.1. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, $c_k = 0$.

Jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa eli lineaarisesti riippumaton, voidaan myös sanoa, että vektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia toisistaan. Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*.

Huom. 1. Vektorijonolla $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ tarkoitetaan yksinkertaisesti tiettyjen vektorien muodostamaa kokoelmaa. Sitä ei saa sekoittaa vektorimerkintään. Kyseessä ei siis ole jonkinlainen ”vektorien vektori”.

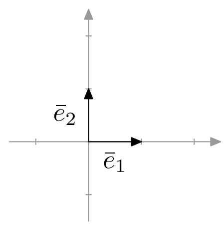
Huom. 2. Määritelmän ehto voidaan ilmaista muodossa ”vektorien lineaarikombinaatio on nolla vain, jos kaikki kertoimet ovat nollia”.

Tullaan näkemään, että jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, voidaan aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkiot kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Virittäjien joukossa ei siis tällöin ole tarpeettomia vektoreita. Katsotaan ensin kuitenkin muutamia esimerkkejä.

Esimerkki 7.2. Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa. Oletetaan, että reaaliluvut c_1 ja c_2 ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 = \bar{0}.$$

Nyt $c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$, joten $(c_1, c_2) = (0, 0)$. Täytyy siis päteä $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Näin on osoitettu, että jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa.



Kuva 7.18: Jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa.

Esimerkki 7.3. Merkitään $\bar{v}_1 = (1,2)$ ja $\bar{v}_2 = (-3,-1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa vai sidottu.

Oletetaan, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{0}$ joillakin c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Nyt

$$c_1(1,2) + c_2(-3,-1) = (0,0)$$

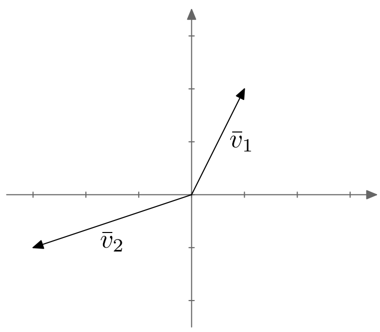
eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä c_1 ja c_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ainoa ratkaisu on $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on siis vapaa.



Kuva 7.19: Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on vapaa.

Esimerkki 7.4. Kun osoitetaan jono sidotuksi, ei välttämättä tarvitse ratkaista yhtälöryhmää. Toisinaan on nimittäin helppo nähdä, minkälaisten kertoimien avulla lineaarikombinaatiosta muodostuu nollavektori.

Merkitään $\bar{w}_1 = (2,1)$ ja $\bar{w}_2 = (-4,-2)$. Huomataan, että

$$2\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \bar{0}.$$

Koska vektorien $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ lineaarikombinaatio on nollavektori, vaikka kertoimet eivät ole nollia, jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on määritelmän nojalla sidottu.

Esimerkki 7.5. Merkitään $\bar{v}_1 = (1,2)$, $\bar{v}_2 = (-3,-1)$ ja $\bar{v}_3 = (-1,1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa vai sidottu. Oletetaan, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ joillakin c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$c_1(1,2) + c_2(-3,-1) + c_3(-1,1) = (0,0)$$

eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä c_1 ja c_2:

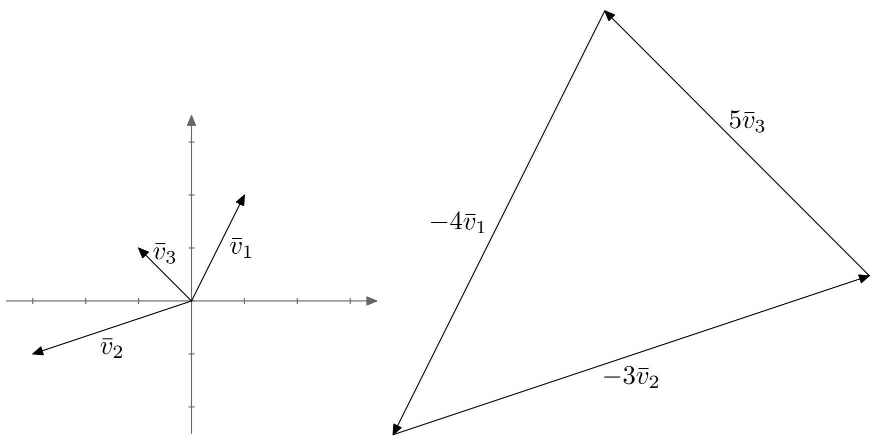
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right].$$

Huomataan, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua:

$$\begin{cases} x_1 = -(4/5)t \\ x_2 = -(3/5)t \qquad \text{missä } t \in \mathbb{R}. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Näin ollen $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ ei ole ainoa ratkaisu. Voidaan valita esimerkiksi $t = 5$, jolloin $c_1 = -4$ ja $c_2 = -3$ ja $c_3 = 5$. Tällöin $-4\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 = \bar{0}$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on siis sidottu. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 7.20.



Kuva 7.20: Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu.

Määritelmän mukaan jonon vapaus kertoo siitä, että nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla jonon vektorien lineaarikombinaationa. Selvästikin yhtälö

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

toteutuu ainakin, jos kertoimiksi $c_1, \ldots, c_k$ valitaan nollat. Toisinaan yhtälö kuitenkin toteutuu myös joillakin muilla kertoimilla. Jono on vapaa, jos yhtälö toteutuu *ainoastaan nollakertoimilla.*

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ kaikki vektorit voidaan ilmaista täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatioina. Siis jos nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa, myös kaikki muut aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ vektorit voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa, ja päinvastoin. Vapaat vektorijonot ovat kiinnostavia nimenomaan sen vuoksi, että niistä saadaan virittäjäjoukko, jossa ei ole turhia vektoreita.

Lause 7.6. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. Muotoa "jos ja vain jos" oleva väite todistetaan kahdessa osassa. Ensin oletetaan väitteen ensimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin jälkimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään usein symbolilla "$\Rightarrow$". Sitten oletetaan jälkimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin ensimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään symbolilla "$\Leftarrow$". Ryhdytään todistamaan väitettä.

"$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoitetaan, että jokainen aliavaruuden $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Oletetaan, että alkio $w \in W$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \tag{4}$$

ja lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k \tag{5}$$

joillakin $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Nyt $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$, joten

$$a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k - (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k) = \bar{0}.$$

Vektorien yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun ominaisuuksien perusteella pätee

$$(a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k - b_k)\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on oletuksen nojalla vapaa, joten yllä olevasta yhtälöstä seuraa, että kaikki kertoimet ovat nollia: $a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_k - b_k = 0$. Siten $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_k = b_k$. Näin ollen tutkitut lineaarikombinaatiot (4) ja (5) ovatkin itse asiassa samanlaiset (niissä on samat kertoimet). Siksi vektoria $\bar{w}$ ei voida kirjoittaa usealla eri tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että jokainen aliavaruuden $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Osoitetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Sitä varten oletetaan, että luvut $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Tiedetään, että ainakin

$$0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \cdots + 0\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska nollavektori $\bar{0}$ on aliavaruuden W alkio, se voidaan oletuksen mukaan kirjoittaa virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Siksi täytyy päteä $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$. Siis jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. □

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono on sidottu, jos ja vain jos jokin sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

Lause 7.7. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ja $k \geq 2$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos*

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu. On siis olemassa luvut $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, joilla pätee

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0},$$

ja lisäksi $c_j \neq 0$ jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Nyt

$$c_j\bar{v}_j = -c_1\bar{v}_1 - \cdots - c_{j-1}\bar{v}_{j-1} - c_{j+1}\bar{v}_{j+1} - \cdots - c_k\bar{v}_k$$

ja edelleen

$$\bar{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\bar{v}_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\bar{v}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\bar{v}_{j+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_j}\bar{v}_k.$$

Siis $\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Nyt on olemassa sellaiset $c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, että

$$\bar{v}_j = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Tästä seuraa, että

$$\bar{0} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + (-1)\bar{v}_j + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Koska kerroin -1 ei ole nolla, on jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ sidottu. □

Esimerkki 7.8. Tarkastellaan eräitä avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita $\bar{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_3 = (0, 0, 2)$ ja $\bar{v}_4 = (3, -1, 0)$. Näillä pätee muun muassa

$$2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \bar{v}_4 = \bar{0},$$

joten jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ on sidottu. Edellisen lauseen perusteella jokin vektoreista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa. Yllä olevasta yhtälöstä nähdäänkin, että

$$\bar{v}_2 = -2\bar{v}_1 + \bar{v}_4.$$

Kaikkia vektoreita ei kuitenkaan välttämättä voida kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa. Esimerkiksi ei ole olemassa sellaisia lukuja a, b ja c, että pätisi

$$\bar{v}_3 \neq a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_4.$$

(Tämän täsmällinen todistaminen jätetään lukijalle.)

7.2 Homogeeniset yhtälöryhmät ja vapaus

Vektorijonon vapautta tutkittaessa päädytään ratkaisemaan yhtälöryhmiä, joissa vakiot ovat nollia. Tällaista yhtälöryhmää kutsutaan homogeeniseksi.

Määritelmä 7.9. Lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kaikki vakiot ovat nollia, on nimeltään *homogeeninen yhtälöryhmä.*

Homogeeninen yhtälöryhmä on siis muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{cases}$$

missä $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$. Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina ainakin yksi ratkaisu:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots \quad x_n = 0.$$

Tätä kutsutaan yhtälöryhmän triviaaliksi ratkaisuksi.

Lause 7.10. *Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on suurempi kuin yhtälöiden määrä m, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.*

Todistus. Ensinnäkin yhtälöryhmällä on välttämättä ainakin triviaali ratkaisu. Siten ratkaisuja on joko yksi tai äärettömän monta.

Oletuksen mukaan yhtälöryhmän matriisissa on enemmän sarakkeita kuin rivejä. Johtavia alkioita enintään yksi joka rivillä. Koska sarakkeita on enemmän kuin rivejä, on matriisissa ainakin yksi sarake, jossa ei ole johtavaa alkiota. Siten vapaita muuttujia on ainakin yksi, ja yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. □

Korollaari 7.11. *Oletetaan, että $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$, missä $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Jos $m > n$, niin jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ on sidottu.*

Huom. Korollaari on lause joka seuraa suoraan tai lähes suoraan toisesta lauseesta. Tämä korollaari on lauseen 7.10 seuraus.

Todistus. Merkitään $\bar{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk})$ kaikilla $k \in \{1, \ldots, m\}$. Nyt yhtälöä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_m\bar{v}_m = \bar{0}$ vastaavaksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1m}x_m & = & 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{2m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{nm}x_m & = & 0. \end{cases}$$

Tässä homogeenisessa yhtälöryhmässä on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä. Siten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. Koska löytyy muitakin ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu, ei jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ ole vapaa. $\square$

Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on pienempi tai yhtä suuri kuin yhtälöiden määrä m, ei ratkaisujen määrästä voi äkkiseltään sanoa mitään varmaa. Ratkaisuja voi olla täsmälleen yksi (triviaali ratkaisu) tai äärettömän monta. Jos siis avaruuden $\mathbb{R}^n$ jonon $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ pituus m on *pienempi* kuin n, ei jonon lineaarisesta riippumattomuudesta voida sanoa sen perusteella mitään.

8 Kanta

Tässä luvussa tarkastellaan aliavaruuden virittäjävektoreita, jotka muodostavat lineaarisesti riippumattoman jonon. Merkintöjen helpottamiseksi oletetaan luvussa koko ajan, että W on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$ virittämä avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus eli

$$W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m).$$

Määritelmä 8.1. Olkoot $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in W$. Vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W *kanta*, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$

b) jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Esimerkki 8.2. Esimerkissä 6.1 osoitettiin, että vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. Jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on lisäksi vapaa esimerkin 7.2 perusteella. Siten $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Vastaavasti avaruudella $\mathbb{R}^n$ on kanta

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n).$$

Tässä $\bar{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, missä luku 1 on vektorin i:s komponentti. Kantaa kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *luonnolliseksi kannaksi*. Lukijan tehtäväksi jätetään osoittaa, että kyseessä on todellakin kanta.

Kannan vektorit siis virittävät aliavaruuden, ja lisäksi kanta on vapaa. Lauseesta 7.6 saadaan seuraava hyvin käyttökelpoinen tulos:

Lause 8.3. *Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. ”$\Rightarrow$”: Oletetaan, että jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Tällöin kannan määritelmän nojalla $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ ja jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa. Lauseesta 7.6 seuraa, että jokainen aliavaruuden $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ vektori voidaan kirjoittaa tasan yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

”$\Leftarrow$”: Oletetaan, että jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa. Tästä seuraa heti, että $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$. Nyt lauseen 7.6 mukaan jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa. Näin kannan määritelmän molemmat ehdot täyttyvät. Siis $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. □

Esimerkki 8.4. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Osoitetaan lauseen 8.3 avulla, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Ratkaistaan yhtälö $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{v}$ eli yhtälö $x_1(2,-1) + x_2(1,3) = (v_1, v_2)$. Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = v_1 \\ -x_1 + 3x_2 = v_2. \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(3v_1 - v_2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(v_1 + 2v_2) \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu riippumatta vektorista $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Siis jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

8.1 Koordinaatit

Kun aliavaruuden vektori kirjoitetaan kannan vektorien lineaarikombinaationa, kertoimia kutsutaan vektorin koordinaateiksi.

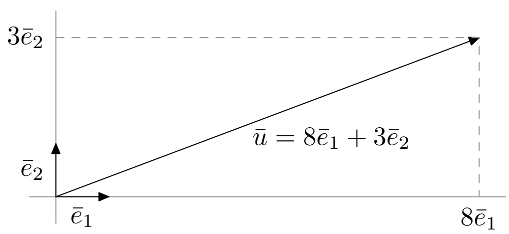
Määritelmä 8.5. Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in W$. Vektorin *$\bar{u}$ koordinaateiksi kannan $\mathcal{B}$ suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \ldots, a_k$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{w}_1 + \cdots + a_k\bar{w}_k\,.$$

Huom. Vektorin koordinaatit jonkin tietyn kannan suhteen ovat yksikäsitteiset, sillä vektori voidaan lauseen 8.3 mukaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Vektorilla on siis kunkin tietyn kannan suhteen vain yhdet koordinaatit. Eri kantojen suhteen saman vektorin koordinaatit voivat tietenkin olla erilaisia.

Esimerkki 8.6. Määritetään vektorin $\bar{u} = (8,3)$ koordinaatit avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollisen kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen. Koordinaatit ovat 8 ja 3, sillä

$$\bar{u} = 8(1,0) + 3(0,1) = 8\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2.$$



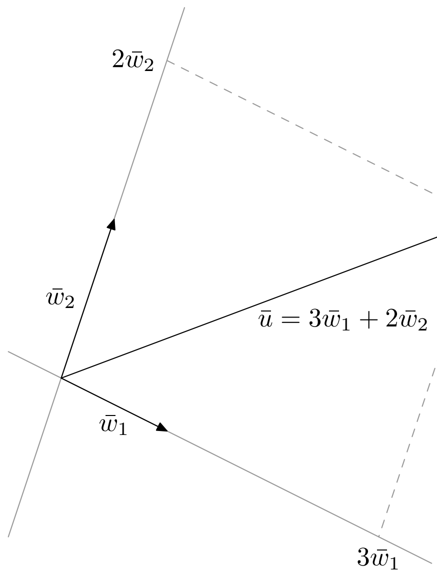
Kuva 8.21: Vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen ovat 8 ja 3.

Tutkitaan sitten vektorin $\bar{u}$ koordinaatteja jonkin toisen kannan suhteen. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Esimerkin 8.4 perusteella $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Määritetään vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen. On siis ratkaistava yhtälö $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{u}$ eli yhtälö $x_1(2, -1) + x_2(1, 3) = (8, 3)$. Esimerkistä 8.4 nähdään, että yhtälön ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}(3u_1 - u_2) = \dfrac{1}{7}(24 - 3) = 3 \\ x_2 = \dfrac{1}{7}(v_1 + 2v_2) = \dfrac{1}{7}(8 + 6) = 2. \end{cases}$$

Siis $\bar{u} = 3\bar{w}_1 + 2\bar{w}_2$, eli kysytyt koordinaatit ovat 3 ja 2. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 8.22.



Kuva 8.22: Vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen ovat 3 ja 2.

8.2 Dimensio

Aliavaruudella voi olla useita eri kantoja, mutta jokaisessa niistä on yhtä monta vektoria.

Lause 8.7. *Aliavaruuden W jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_j)$ ja $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ ovat molemmat aliavaruuden W kantoja. Pyritään osoittamaan, että $j = k$. Tehdään se osoittamalla, että muut vaihtoehdot $j < k$ ja $k < j$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan, että $j < k$. Tarkastellaan yhtälöä

$$x_1\bar{w}_1 + \cdots + x_k\bar{w}_k = \bar{0}\,. \tag{6}$$

Koska $\mathcal{B}$ on W:n kanta, voidaan kaikki kannan $\mathcal{C}$ vektorit kirjoittaa kannan $\mathcal{B}$ vektorien lineaarikombinaatioina:

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1j}\bar{v}_j \\
\bar{w}_2 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2j}\bar{v}_j \\
&\ \vdots \\
\bar{w}_k &= a_{k1}\bar{v}_1 + a_{k2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{kj}\bar{v}_j
\end{aligned}$$

joillakin $a_{11}, \ldots, a_{kj} \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla nämä yhtälöön (6) muodostuu yhtäpitävä yhtälö:

$$\begin{aligned}
&x_1(a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1j}\bar{v}_j) \\
&\qquad + x_2(a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2j}\bar{v}_j) \\
&\qquad\qquad + \ldots \\
&\qquad\qquad\quad + x_k(a_{k1}\bar{v}_1 + a_{k2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{kj}\bar{v}_j) = \bar{0},
\end{aligned}$$

josta saadaan edelleen ryhmittelemällä

$$\begin{aligned}
&(x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ka_{k1})\bar{v}_1 \\
&\qquad + (x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_ka_{k2})\bar{v}_2 \\
&\qquad\qquad + \ldots \\
&\qquad\qquad\quad + (x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \cdots + x_ka_{kj})\bar{v}_j = \bar{0}.
\end{aligned}$$

Jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_j)$ on kanta, joten se on vapaa. Siten edellinen yhtälö toteutuu, jos ja vain jos kaikki kertoimet ovat nollia:

$$\begin{cases}
x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ka_{k1} &= 0 \\
x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_ka_{k2} &= 0 \\
\qquad\qquad\vdots & \ \ \vdots \\
x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \cdots + x_ka_{kj} &= 0
\end{cases}$$

Kyseessä on homogeeninen yhtälöryhmä, jossa tuntemattomien määrä k on suurempi kuin yhtälöiden määrä j. Lauseen 7.10 mukaan yhtälöryhmällä on muitakin ratkaisuja kuin $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$. Siis jono $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on sidottu. Tämä on ristiriita, sillä $\mathcal{C}$ on aliavaruuden W kanta.

Tapaus $j > k$ käsitellään vastaavasti. Tällöinkin päädytään ristiriitaan. Täytyy siis päteä $j = k$. □

Voidaan osoittaa, että jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudella on kanta. (Tämä todistetaan kurssin toisessa osassa.) Lisäksi edellä nähtiin, että jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria. Kantavektorien lukumäärää kutsutaan avaruuden dimensioksi.

Määritelmä 8.8. Aliavaruuden W *dimensio* $\dim(W)$ on aliavaruuden W kannan vektoreiden lukumäärä. Jos aliavaruuden dimensio on n, sanotaan, että aliavaruus on *n-ulotteinen*.

Esimerkki 8.9. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimensio on 2, sillä avaruudella on kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Vastaavasti avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio on n, sillä avaruuden luonnollisen kannan vektorien lukumäärä on n.

Esimerkki 8.10. Merkitään $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ ja $\bar{v}_3 = (0, -5, 1)$. Olkoon $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Määritetään aliavaruuden W dimensio.

Oletetaan, että $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. Selvitetään, mikä ehto vektorin $\bar{u}$ komponenttien pitää toteuttaa, jotta $\bar{u}$ on aliavaruudessa W. Ratkaistaan yhtälö $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{u}$ eli yhtälö

$$x_1(3, -1, 5) + x_2(2, 1, 3) + x_3(0, -5, 1) = (u_1, u_2, u_3).$$

Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}-5x_3} = u_1 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = u_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = u_3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 0 & u_1 \\ -1 & 1 & -5 & u_2 \\ 5 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right],$$

ja se saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua matriisiksi

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 5 & -u_2 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{5}(u_1 + 3u_2) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}(5u_3 + u_2 - 8u_1) \end{array}\right].$$

Havaitaan, että yhtälöryhmällä on ratkaisu, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö $0 = \frac{1}{5}(5u_3 + u_2 - 8u_1)$ on tosi eli $5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0$. Siten

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \\ &= \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0\} \\ &= \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_2 = 8u_1 - 5u_3\} \\ &= \{(u_1, 8u_1 - 5u_3, u_3) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u_1(1, 8, 0) + u_3(0, -5, 1) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\big((1, 8, 0), (0, -5, 1)\big). \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että vektorit $(1, 8, 0)$ ja $(0, -5, 1)$ virittävät aliavaruuden. Lisäksi voidaan näyttää, että nämä kaksi vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia. (Tämän osoittaminen jätetään lukijalle.) Siispä jono $\big((1, 8, 0), (0, -5, 1)\big)$ on avaruuden W kanta, ja $\dim(W) = 2$.

Esimerkki 8.11. Edellisen esimerkin aliavaruudelle W voidaan löytää kanta myös toisella menetelmällä. Oletetaan nyt, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in W$. Tällöin yhtälö

$$x_1(3,-1,5) + x_2(2,1,3) + x_3(0,-5,1) = (w_1, w_2, w_3) \tag{7}$$

pätee joillakin kertoimilla $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä yhtälöä vastaa matriisi

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 0 & w_1 \\ -1 & 1 & -5 & w_2 \\ 5 & 3 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Koska olemme olettaneet, että vektori $\bar{w}$ kuuluu aliavaruuteen W, tiedämme, että yhtälöstä (7) saatavalla yhtälöryhmällä on varmasti ainakin yksi ratkaisu. Tämän vuoksi on samantekevää, mitä porrasmatriisiin tulee pystyviivan oikealle puolelle, ja voimme kiinnittää huomion yhtälön kertoimiin. Nämä näyttävät porrasmatriisissa seuraavilta:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Porrasmatriisista huomataan, että kolmannessa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota. Muuttujan x_3 arvo voidaan siis valita vapaasti, ja valinta määrää muuttujien x_1 ja x_2 arvot. Siispä yhtälössä (7) voi kerroin x_3 saada minkä tahansa arvon, esimerkiksi arvon 0. Jokainen vektori $\bar{w} \in W$ voidaan täten ilmaista pelkästään vektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaationa. Koska nämä vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat (tarkistus jätetään lukijan tehtäväksi), ne muodostavat aliavaruuden W kannan. Tämä kanta $\big((3,-1,5),(2,1,3)\big)$ on eri kuin edellisessä esimerkissä saatu, mutta siinä on yhtä monta vektoria. Aliavaruuden W dimensio on siis 2.

9 Matriisit

Aiemmissa luvuissa matriiseja on käsitelty siinä määrin kuin on ollut tarpeellista yhtälönratkaisun kannalta. Matriiseja käytetään kuitenkin myös muihin tarkoituksiin, ja siksi on hyödyllistä selvittää, minkälaisia ominaisuuksia matriiseilla itsellään on. Samalla saadaan joitakin uusia tapoja myös yhtälöryhmien ratkaisujen tutkimiseen.

Reaalialkioinen $m \times n$ *-matriisi* on reaalilukutaulukko, jossa on m riviä ja n saraketta. Esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

on $m \times n$ -matriisi. Voidaan myös sanoa, että matriisin A *tyyppi* on $m \times n$. Kaikkien reaalikertoimisten $m \times n$ -matriisien joukkoa merkitään $\mathbb{R}^{m\times n}$. Matriisissa olevia lukuja kutsutaan matriisin *alkioiksi*, ja rivillä i sarakkeessa j olevaa alkiota merkitään $A(i,j)$. Esimerkiksi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 11 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

on reaalikertoiminen 4×3 -matriisi eli $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Nähdään, että $B(1,3) = 5$ ja $B(2,2) = 11$.

9.1 Matriisien laskutoimituksia

Matriiseille, kuten vektoreillekin, voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia. Osa niistä muistuttaa läheisesti vektorien vastaavia laskutoimituksia.

Matriisien yhteenlasku

Matriisien *yhteenlasku* määritellään seuraavasti. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matriisien A ja B summa saadaan laskemalla yhteen samoissa kohdissa olevat alkiot. Tuloksena on $m \times n$ -matriisi $A + B$, jolle pätee

$$(A + B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j)$$

kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Huom. Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen.

Skalaarikertolasku

Minkä tahansa matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ voi kertoa reaaliluvulla c, ja tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi*. Saatava tulos on $m \times n$ -matriisi cA, jota nimitetään matriisin A *skalaarimonikerraksi* ja jolle pätee

$$(cA)(i,j) = c \cdot A(i,j)$$

kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$. Esimerkiksi

$$2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisia $(-1)A$ on tapana merkitä $-A$ ja matriisisummaa $A + (-B)$ on tapana merkitä $A - B$.

Matriisikertolasku

Matriiseille voidaan määritellä myös *matriisikertolasku*. Tämä laskutoimitus on hieman monimutkaisempi kuin edellä määritellyt eikä mitään vastaavaa ole olemassa vektoreille.

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään vain, jos ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä. Olkoot siis $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Tällöin tulo AB on $m \times p$ -matriisi, jolle pätee

$$\begin{aligned}(AB)(i,j) &= A(i,1)B(1,j) + A(i,2)B(2,j) + \cdots + A(i,n)B(n,j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j)\end{aligned}$$

kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,p\}$.[1]

Esimerkki 9.1. Lasketaan matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tulo. Koska matriisissa A on kolme saraketta (tyyppi 2×3) ja matriisissa B on vastaavasti kolme riviä (tyyppi 3×2), matriisit voidaan kertoa keskenään. Tulos-

[1]Merkintä $\sum_{k=1}^{n} c_k$ tarkoittaa summaa $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

matriisi on tyyppiä 2×2. Määritelmän mukaan

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 9.2. Matriisikertolasku ei ole vaihdannainen operaatio eli tulon tekijöiden järjestystä ei voi vaihtaa. Tarkastellaan vaikkapa matriiseja

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Laskemalla tulo molemmin päin huomataan, että

$$
AB = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{mutta} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.
$$

Siten $AB \neq BA$.

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi ja $k \in \{1, 2, \dots\}$. Tällöin voidaan matriisitulon avulla määritellä *matriisipotenssi*

$$
A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ kpl}}.
$$

9.2 Erityisiä matriiseja

Matriiseja, joiden kaikki alkiot ovat nollia, eli jotka ovat muotoa

$$
O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},
$$

kutsutaan *nollamatriiseiksi*. *Ykkösmatriiseja* puolestaan ovat matriisit

$$
I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.
$$

Ykkösmatriiseja kutsutaan usein myös *yksikkömatriiseiksi*.

Huom. 1. Nollamatriisi voi olla mitä tahansa tyyppiä. Sen sijaan yksikkömatriisissa on aina yhtä paljon rivejä ja sarakkeita.

Huom. 2. Jos matriisien tyypeistä ei ole epäselvyyttä, saatetaan merkitä yksinkertaisemmin $O_{m\times n} = O$ ja $I_n = I$.

Ei ole vaikea nähdä, että nollamatriisit käyttäytyvät matriisien yhteenlaskun suhteen samalla tavalla kuin nolla lukujen yhteenlaskussa (tai nollavektori vektorien yhteenlaskussa): sellaisen lisääminen toiseen samantyyppiseen matriisiin ei muuta tuota toista matriisia mitenkään. Samalla tavoin ykkösmatriisit käyttäytyvät matriisikertolaskussa aivan kuten reaaliluku 1 tavallisessa kertolaskussa. Kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pätee nimittäin

$$I_m A = A \quad \text{ja} \quad AI_n = A.$$

Eri puolilta kerrottaessa on matriisikertolaskun rajoituksen vuoksi käytettävä eri kokoista ykkösmatriisia.

Neliömatriisi on matriisi, jossa on yhtä monta riviä ja saraketta. Esimerkiksi ykkösmatriisit ovat neliömatriiseja.

Neliömatriisin alkio on *lävistäjällä*, jos alkion rivin ja sarakkeen numerot ovat samat. Matriisi, jonka kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat lävistäjällä, on *lävistäjämatriisi*. Lävistäjämatriisi, jonka kaikki lävistäjäalkiot ovat samoja, on puolestaan *skalaarimatriisi*. Skalaarimatriisit ovat ykkösmatriisin skalaarimonikertoja. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

on lävistäjämatriisi ja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3$$

on skalaarimatriisi.

9.3 Matriisien laskusääntöjä

Matriisien laskutoimitukset noudattavat tiettyjä sääntöjä, jotka monessa kohdassa muistuttavat lukujen laskusääntöjä.

Lause 9.3. *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A, B ja C sekä reaaliluvulle a, jos laskutoimitukset on määritelty:*

a) $A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) $A(BC) = (AB)C$

d) $A(B + C) = AB + AC$

e) $(A + B)C = AC + BC$

f) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

Huom. Kuten aiemmin on jo mainittu, yleisessä tapauksessa $AB \neq BA$, eli tulon vaihdannaisuus ei päde matriiseilla.

Todistus. Osoitetaan esimerkin vuoksi kohta d). Muiden kohtien tarkistaminen jätetään lukijalle.

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Nyt $A(B + C)$ ja $AB + AC$ ovat molemmat $m \times p$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
\big(A(B + C)\big)(i, j) &= \sum_{k=1}^{n} A(i, k) \cdot (B + C)(k, j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i, k)\big(B(k, j) + C(k, j)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(A(i, k)B(k, j) + A(i, k)C(k, j)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i, k)B(k, j) + \sum_{k=1}^{n} A(i, k)C(k, j) \\
&= (AB)(i, j) + (AC)(i, j) \\
&= (AB + AC)(i, j).
\end{aligned}$$

Koska matriisit $A(B+C)$ ja $AB+AC$ ovat samaa tyyppiä ja niillä on täsmälleen samat alkiot, pätee $A(B + C) = AB + AC$. □

9.4 Matriisin transpoosi

Määritelmä 9.4. Oletetaan, että A on $m \times n$ -matriisi. Sen *transpoosi* $A^\top$ on $n \times m$-matriisi, joka saadaan vaihtamalla matriisin A rivit ja sarakkeet keskenään.

Esimerkiksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transpoosi on

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 9.5. Neliömatriisin A sanotaan olevan *symmetrinen*, jos $A^\top = A$. Neliömatriisin A sanotaan olevan *antisymmetrinen*, jos $A^\top = -A$.

Esimerkki 9.6. Merkitään

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$B^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = B \quad \text{ja} \quad C^\top = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = -C.$$

Siis B on symmetrinen ja C on antisymmetrinen.

Transpoosioperaation käyttäytymistä matriisien laskutoimitusten kanssa valottaa seuraava lause.

Lause 9.7. *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A ja B sekä reaaliluvulle t, jos laskutoimitukset on määritelty (ts. matriisit ovat sopivaa tyyppiä):*

a) $(A^\top)^\top = A$

b) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

c) $(AB)^\top = B^\top A^\top$

d) $(tA)^\top = t(A^\top)$.

Huom. Erityisesti kannattaa painaa mieleen tulon tekijöiden järjestyksen vaihtuminen kohdassa c).

Todistus. Osoitetaan todeksi kohta c) ja jätetään loput kohdat lukijalle. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Nyt sekä $(AB)^\top$ että $B^\top A^\top$ ovat molemmat $p \times m$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ja $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}(AB)^\top(i,j) &= (AB)(j,i) = \sum_{k=1}^{n} A(j,k)\cdot B(k,i) = \sum_{k=1}^{n} A^\top(k,j)\cdot B^\top(i,k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} B^\top(i,k)\cdot A^\top(k,j) = (B^\top A^\top)(i,j).\end{aligned}$$

Siten $(AB)^\top = B^\top A^\top$. □

9.5 Käänteismatriisi

Matriiseille ei ole määritelty jakolaskua. Joissakin tapauksissa tämä puute voidaan korjata käyttämällä niin sanottuja käänteismatriiseja, jotka toimivat samalla tavalla kuin käänteisluvut tavallisten lukujen kertolaskussa. Toisin sanoen käänteismatriisilla kertominen ajaa saman asian kuin jakaminen. Pian tullaan kuitenkin valitettavasti huomaamaan, että kaikilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia. Kaiken lisäksi on kätevintä rajoittua tarkastelemaan vain neliömatriiseja.

Määritelmä 9.8. Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa saman tyyppinen neliömatriisi B, jolle pätee

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

sanotaan, että A on *kääntyvä* ja B on matriisin A *käänteismatriisi.*

Esimerkki 9.9. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi on

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

sillä

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lause 9.10. *Matriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.*

Todistus. Oletetaan, että matriisilla A on käänteismatriisit B ja B'. Nyt

$$B = BI = B(AB') = (BA)B' = IB' = B'.$$

Yllä olevan yhtälöketjun perusteella B ja B' ovat välttämättä sama matriisi. Näin ollen A:n käänteismatriiseja ei voi olla enempää kuin yksi. □

Jos matriisi A on kääntyvä, sen käänteismatriisille käytetään merkintää A^{-1}. Huomaa, että merkintää A^{-1} ei voi käyttää ennen kuin on varmistanut, että matriisi A todella on kääntyvä.

Seuraava lause auttaa joidenkin matriisien käänteismatriisien löytämisessä.

Lause 9.11. *Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Tällöin myös matriisit A^{-1}, AB ja $A^\top$ ovat kääntyviä, ja niiden käänteismatriisit ovat seuraavat:*

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Todistus. Lauseen matriisit osoitetaan kääntyviksi näyttämällä kussakin tapauksessa, että väitetty käänteismatriisi todella on matriisin käänteismatriisi.

a) Osoitetaan matriisi A^{-1} kääntyväksi näyttämällä, että sen käänteismatriisi on A. Koska $A^{-1}A = I$ ja $AA^{-1} = I$, on A matriisin A^{-1} käänteismatriisi eli $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) Matriisia AB koskevan väitteen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

c) Osoitetaan, että matriisin $A^\top$ käänteismatriisi on $(A^{-1})^\top$. Lauseen 9.7 nojalla pätee

$$A^\top(A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I^\top = I.$$

Samalla tavalla osoitetaan, että $(A^{-1})^\top A^\top = I$. Siten $(A^{-1})^\top$ on matriisin $A^\top$ käänteismatriisi. Tästä seuraa myös, että matriisi $A^\top$ on kääntyvä. □

Matriiseille, joiden tyyppi on 2×2, on olemassa erityinen kaava käänteismatriisin löytämiseksi.

Lause 9.12. *Matriisi*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $ad - bc \neq 0$. *Jos matriisi* A *on kääntyvä, sen käänteismatriisi on*

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Todistus. Oletetaan, että $ad - bc \neq 0$. Merkitään

$$B = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voidaan todeta, että $AB = I$ ja $BA = I$. Siten B on matriisin A käänteismatriisi ja A on kääntyvä.

Oletetaan sitten, että $ad - bc = 0$. Nyt on tutkittavana kaksi eri tapausta: joko $a = 0$ tai $a \neq 0$. Jos $a = 0$, niin $bc = 0$. Siten joko $b = 0$ tai $c = 0$. Tällöin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{tai} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Kummassakaan tapauksessa ei ole olemassa matriisia B, jolle pätee $AB = I$. Tuloon AB tulee nimittäin välttämättä nollarivi tai nollasarake. Siten A ei ole kääntyvä.

Tutkitaan sitten tapaus $a \neq 0$. Nyt $d = bc/a$ ja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & bc/a \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että on olemassa sellainen matriisi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

että $AB = I$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & bc/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + bcz/a & cy + bcw/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

eli

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bw = 0 \\ cx + bcz/a = 0 \\ cy + bcw/a = 1. \end{cases}$$

Kolmannen yhtälön perusteella $c(x + bz/a) = 0$. Jos $c = 0$, päädytään samankaltaiseen tilanteeseen kuin silloin, kun $a = 0$. Siten voidaan olettaa, että $c \neq 0$. Tällöin täytyy päteä $x + bz/a = 0$ eli $x = -bz/a$. Toisaalta ensimmäisen yhtälön perusteella $x = (1 - bz)/a$. Nyt $-bz = 1 - bz$, joten $1 = 0$. Tämä on mahdotonta. Siten matriisilla A ei ole käänteismatriisia. □

Suurempien matriisien käänteismatriisien laskemiseksi ei ole yhtä helppoa kaavaa. Käänteismatriisin määrittämistä käsitellään lisää luvussa 10.2.

9.6 Sarakevektorit

Usein avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ samastetaan matriisin

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

kanssa. Joukon $\mathbb{R}^{n \times 1}$ matriiseja kutsutaan *sarakevektoreiksi*. Kun avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita ajatellaan sarakevektoreina, voi niitä kertoa matriiseilla: jos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, on tulo $A\bar{v}$ määritelty, kun $\bar{v}$ tulkitaan joukon $\mathbb{R}^{n \times 1}$ alkioksi.

Esimerkki 9.13. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja vektorin $\bar{v} = (-5, 3)$ tulo on

$$A\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Tämä sarakevektori voidaan samastaa vektorin $(2, 5, 13)$ kanssa.

10 Matriisit ja yhtälöryhmät

Tässä luvussa esitellään uusi tapa kirjoittaa lineaarinen yhtälöryhmä matriisien avulla käyttäen hyväksi matriisikertolaskua sekä sarakevektoreita. Pilkotaan sitä varten yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{8}$$

eri osat omiksi matriiseikseen. Ensinnäkin yhtälöryhmän (8) *kerroinmatriisiksi* kutsutaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kerroinmatriisi sisältää siis yhtälöryhmän kertoimet järjestyksessä. Kerätään vielä muuttujat ja vakiot omiksi matriiseikseen:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Kaikki tuntemattomat ovat sarakevektorissa $\bar{x}$ ja kaikki vakiot sarakevektorissa $\bar{b}$.

Nyt yhtälöryhmä (8) voidaan kirjoittaa matriisien avulla. Huomataan nimittäin, että

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Sarakevektorin $A\bar{x}$ alkiot vastaavat yhtälöryhmän (8) yhtälöiden vasempia puolia. Koska sarakevektori $\bar{b}$ sisältää yhtälöiden oikeat puolet samassa järjestyksessä, yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muodossa $A\bar{x} = \bar{b}$ eli

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Kerroinmatriisin kääntyvyys vaikuttaa nyt merkittävästi yhtälöryhmän ratkaisuihin.

Lause 10.1. *Jos matriisi A on kääntyvä, yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.*

Todistus. Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Todistuksessa on kaksi osaa. On osoitettava, että yhtälöllä on jokin ratkaisu ja että ratkaisuja ei ole enempää kuin yksi.

Osoitetaan ensin, että yhtälölle löytyy jokin ratkaisu. Koska A on kääntyvä, on olemassa käänteismatriisi A^{-1}. Nähdään, että $A^{-1}\bar{b}$ on yhtälön ratkaisu, sillä

$$A(A^{-1}\bar{b}) = (AA^{-1})\bar{b} = I\bar{b} = \bar{b}.$$

Osoitetaan sitten, ettei muita ratkaisuja ole. Oletetaan, että $\bar{y}$ on jokin (toinen) ratkaisu. Tällöin $A\bar{y} = \bar{b}$. Kerrotaan yhtälön molemmat puolet matriisilla A^{-1}, jolloin saadaan

$$A^{-1}A\bar{y} = A^{-1}\bar{b}$$

ja edelleen $\bar{y} = A^{-1}\bar{b}$. Kysymyksessä onkin sama ratkaisu, joka löydettiin jo aikaisemmin. Siten ratkaisuja on vain yksi ja se on $A^{-1}\bar{b}$. □

10.1 Alkeismatriisit

Myös alkeisrivitoimitukset voi ilmaista matriisikertolaskun avulla. Osoittautuu, että jos matriisia kerrotaan niin kutsutulla alkeismatriisilla, tullaan matriisille tehneeksi alkeisrivitoimitus. Tästä tulee olemaan hyötyä kääntyvien matriisien käsittelyssä.

Määritelmä 10.2. Matriisi on *alkeismatriisi*, jos se on saatu ykkösmatriisista yhdellä alkeisrivitoimituksella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat alkeismatriiseja:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nämä alkeismatriisit on saatu ykkösmatriisista tekemällä sille alkeisrivitoimitukset $-\frac{1}{2}R_3$, $R_2 \leftrightarrow R_4$ ja $R_3 + 3R_1$.

Esimerkki 10.3. Osoittautuu, että alkeismatriiseilla kertominen vastaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Tutkitaan tätä edellisen esimerkin alkeismatriisien ja matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

avulla. Laskemalla nähdään, että

$$E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -\mathbf{\frac{1}{2}}a_{31} & -\mathbf{\frac{1}{2}}a_{32} & -\mathbf{\frac{1}{2}}a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$

$$E_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{bmatrix}$$

ja

$$E_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{a_{11}} + a_{31} & \mathbf{3}\boldsymbol{a_{12}} + a_{32} & \mathbf{3}\boldsymbol{a_{13}} + a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että jokaisella alkeismatriisilla kerrottaessa matriisille A tullaan tehneeksi sama alkeisrivioperaatio, jonka avulla alkeismatriisi muodostettiin.

Yksittäinen esimerkki ei takaa, että alkeismatriisilla kertominen vastaa aina alkeisrivitoimituksen tekemistä. Esimerkin perusteella voi kuitenkin ymmärtää, miksi näin on. Väitteen todistaminen on melko työlästä, joten se jätetään väliin.

Lemma 10.4. *Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Olkoon E alkeismatriisi, joka saadaan tekemällä jokin alkeisrivitoimitus ykkösmatriisille I_n. Jos matriisille A tehdään sama alkeisrivitoimitus, tuloksena on matriisi EA.*

Huom. Lemma tarkoittaa apulausetta. Se on siis pieni tulos, jota voidaan käyttää hyväksi tärkeämpien lauseiden todistamisessa.

Lause 10.5. *Alkeismatriisit ovat kääntyviä, ja alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi.*

Todistus. Tarkkaa todistusta ei esitetä tässä. Käydään kuitenkin läpi todistuksen idea.

Jokainen alkeisrivitoimitus voidaan peruuttaa toisella alkeisrivitoimituksella kuten kohta nähdään. Kutsutaan tätä alkeisrivitoimitusta alkuperäisen alkeisrivitoimituksen *käänteistoimitukseksi.*

Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Jos matriisille tehdään alkeisrivitoimitus $R_i \leftrightarrow R_j$, päästään takaisin alkutilanteeseen tekemällä sama alkeisrivitoimitus uudelleen. Alkeisrivitoimitus $R_i \leftrightarrow R_j$ on siis itsensä käänteistoimitus. Alkeisrivitoimituksen aR_i käänteistoimitus on puolestaan $\frac{1}{a}R_i$, ja alkeisrivitoimituksen $R_i + bR_j$ käänteistoimitus on $R_i - bR_j$.

Alkeismatriisin käänteismatriisi saadaan aina käänteistoimitusta vastaavasta alkeismatriisista. Alkeisrivitoimitusta $R_i \leftrightarrow R_j$ vastaava alkeismatriisi on oma käänteismatriisinsa, alkeisrivitoimitusta aR_i vastaavan alkeismatriisin käänteismatriisi on alkeisrivitoimitusta $\frac{1}{a}R_i$ vastaava alkeismatriisi ja niin edelleen. Alkeisrivitoimituksen tekeminen vastaa nimittäin edellisen lemman nojalla alkeismatriisilla kertomista. Esimerkiksi alkeisrivitoimitukset aR_i ja $\frac{1}{a}R_i$ peräkkäin suoritettuina eivät tee matriisille mitään. Siten niitä vastaavien alkeismatriisien tulo on ykkösmatriisi, jolla kertominen ei tee matriisille mitään. □

Esimerkki 10.6. Etsitään alkeismatriisin

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Matriisi vastaa alkeisrivitoimitusta $R_3 + 3R_1$. Tämän alkeisrivitoimituksen voi kumota tekemällä alkeisrivitoimituksen $R_3 - 3R_1$. Sitä vastaava alkeismatriisi on

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voi vielä varmistaa, että $EF = I$ ja $FE = I$. Siis $E^{-1} = F$.

Lauseessa 10.1 todettiin jo kääntyvien matriisien merkitys yhtälöryhmän ratkaisun kannalta. Nyt tuota tulosta voidaan täydentää tarkastelemalla lisäksi alkeisrivioperaatioita ja niitä vastaavia alkeismatriiseja.

Lause 10.7. *Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

a) Matriisi A on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

Todistus. Osoitetaan väite todistamalla seuraava päättelyketju:

$$\text{a)} \Rightarrow \text{b)} \Rightarrow \text{c)} \Rightarrow \text{d)} \Rightarrow \text{e)} \Rightarrow \text{a)}.$$

Tämän jälkeen tiedetään, että jokainen lauseen kohta on yhtäpitävä toisten kohtien kanssa.

a) $\Rightarrow$ b): Väite on osoitettu lauseessa 10.1.

b) $\Rightarrow$ c): Oletetaan, että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Tämä pätee myös, jos $\bar{b} = \bar{0}$. Toisaalta yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on aina ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Siten $\bar{x} = \bar{0}$ on ainoa ratkaisu.

c) $\Rightarrow$ d): Oletetaan, että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Merkitään $A(i,j) = a_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Yhtälöä $A\bar{x} = \bar{0}$ vastaava lineaarinen yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu ja muuttujia on yhtä monta kuin yhtälöitä, täytyy yhtälöryhmän olla ekvivalentti yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

kanssa. Tämä tarkoittaa, että matriisi A saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua ykkösmatriisiksi. Toisin sanottuna A on riviekvivalentti matriisin I kanssa.

d) $\Rightarrow$ e): Oletetaan, että matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa. Olkoot $E_1, \ldots, E_k$ ne alkeismatriisit, joilla kertomalla matriisista A saadaan redusoitu porrasmatriisi. Nyt siis pätee

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan vasemmalta matriisilla E_k^{-1}, saadaan $E_{k-1} \cdots E_1 A = E_k^{-1}$. Kun tämän yhtälön vasemmat puolet kerrotaan matriisilla E_{k-1}^{-1}, saadaan $E_{k-2} \cdots E_1 A = E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$. Jatkamalla samaan tapaan päädytään yhtälöön

$$A = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}.$$

Koska alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi, on väite todistettu.

e) $\Rightarrow$ a): Oletetaan, että $A = E_1 \cdots E_k$, missä $E_1, \ldots, E_k$ ovat alkeismatriiseja. Merkitään

$$B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} AB &= (E_1 \cdots E_k)(E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}) \\ &= E_1 \cdots (E_k E_k^{-1}) \cdots E_1^{-1} \\ &= E_1 \cdots E_{k-1} I E_{k-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} \\ &\ \ \vdots \\ &= E_1 E_1^{-1} = I. \end{aligned}$$

Samalla tavalla nähdään, että $BA = I$. Siten B on matriisin A käänteismatriisi. $\square$

10.2 Käänteismatriisin määrittäminen

Muuttamalla neliömatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi voidaan nähdä, onko matriisi kääntyvä. Jos nimittäin matriisi A onnistutaan muuttamaan alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, niin A on lauseen 10.7 nojalla kääntyvä eli sillä on käänteismatriisi A^{-1}. Muussa tapauksessa A ei ole kääntyvä.

Jos matriisi on kääntyvä, käytetyistä alkeisrivitoimituksista saadaan myös selville, mikä käänteismatriisi on. Oletetaan, että matriisi A on muutettu ykkösmatriisiksi alkeisrivitoimituksilla, joita vastaavat alkeismatriisit $E_1, \dots, E_k$. Nyt

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

Tällöin käänteismatriisille pätee

$$\begin{aligned} A^{-1} = IA^{-1} &= (E_k \cdots E_1 A)A^{-1} = E_k \cdots E_1(AA^{-1}) \\ &= E_k \cdots E_1 I. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että tekemällä ykkösmatriisille I samat alkeisrivitoimitukset kuin tehtiin alunperin matriisille A päädytään käänteismatriisiin A^{-1}.

Matriisin A kääntyvyyden selvittäminen ja käänteismatriisin etsiminen voidaan tehdä yhtä aikaa. Yhdistetään matriisit A ja I matriisiksi $[A \mid I\,]$. Tehdään tälle matriisille alkeisrivitoimituksia, joilla A muutetaan redusoiduksi porrasmatriisiksi. Jos matriisi A saadaan muutettua alkeisrivitoimitusten avulla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Kuten edellä todettiin, samat alkeisrivitoimitukset muuttavat ykkösmatriisin I matriisin A käänteismatriisiksi A^{-1}. Siis

$$[A \mid I] \quad \rightsquigarrow \quad [I \mid A^{-1}].$$

Esimerkki 10.8. Tutkitaan, onko matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Muokataan yhdistettyä matriisia

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

alkeisrivitoimituksilla samaan tapaan kuin Gaussin-Jordanin menetelmässä. Tavoitteena on saada vasemmalle puolelle ykkösmatriisi. Muokkaus voi tapahtua esimerkiksi seuraavasti:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + \frac{5}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 4R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Koska matriisi A saatiin muutettua alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Lisäksi sen käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entä jos matriisi ei ole kääntyvä? Kuinka voidaan osoittaa, että matriisista ei saada alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisia? On itse asiassa niin, että jos alkeisrivitoimitusten avulla saadaan aikaan nollarivi, ei matriisi voi olla riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa. (Todistus perustuisi redusoidun porrasmatriisin yksikäsitteisyyteen.) Nollarivi on siis merkki siitä, ettei matriisi ei ole kääntyvä.

Esimerkki 10.9. Tutkitaan, onko matriisilla

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Ryhdytään muokkaamaan yhdistettyä matriisia alkeisrivitoimituksilla:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 4R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Koska matriisin B viimeisen rivin paikalle tuli nollarivi, matriisista B ei saada alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisia. Siten B ei ole kääntyvä.

11 Determinantti

Neliömatriisille voidaan laskea luku, joka kertoo muun muassa, onko matriisi kääntyvä vai ei. Tätä lukua kutsutaan matriisin determinantiksi. Determinantilla on muitakin sovelluksia, mutta tässä yhteydessä tarkastelemme vain sen yhteyttä matriisin kääntyvyyteen.

Determinantti voidaan määritellä monin eri tavoin. Tähän lukuun on valittu eräs melko yksinkertainen tapa. Kaikki luvussa esitellyt tulokset voitaisiin johtaa valitusta määritelmästä, mutta useimmat johdot olisivat niin työläitä, että niistä tyydytään antamaan vain perusidea. Käytettäessä hieman kehittyneempiä määritelmiä monet todistukset helpottuisivat huomattavasti, mutta itse määritelmän esittäminen veisi enemmän tilaa.

11.1 Pienten matriisien determinantit

Tarkastellaan ensin korkeintaan 3×3 -matriisien determinantteja. Determinantti voidaan laskea vain neliömatriisille.

Määritelmä 11.1.

a) Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det(A) = a$.

b) Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det(B) = ad - bc$.

c) Matriisin

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det(C) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$.

Matriisin determinanttia voi merkitä myös pystyviivojen avulla:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix}, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \det(C) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Esimerkki 11.2. Matriisin $A = [4]$ determinantti on $\det(A) = 4$. Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on puolestaan

$$\det(B) = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 4 + 2 = 6.$$

Edelleen matriisin

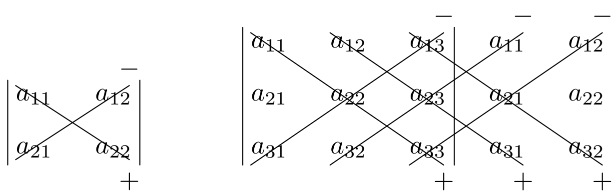
$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det(C) &= -2\big(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2\big) - 3\big(0 \cdot 4 - (-1) \cdot 1\big) + 2\big(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1\big) \\ &= -2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -17. \end{aligned}$$

Matriisille, jonka tyyppi on 2×2, voi käyttää determinantin laskemiseen kuvassa 11.23 esitettyä muistisääntöä. Piirretään matriisin poikki vinoviivat. Samalla viivalla olevat alkiot kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki ja muutoin miinusmerkki. Lopuksi tulot summataan.

Kuvassa 11.23 on esitetty laskemista helpottava muistisääntö myös suuremman, tyyppiä 3×3 olevan matriisin determinantille. Kirjoitetaan matriisin vierelle matriisin ensimmäinen ja toinen sarake. Piirretään kuvion päälle matriisin lävistäjän suuntaisia viivoja sekä vastakkaissuuntaisia viivoja. Samalla viivalla olevat alkiot kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki. Jos viiva on vastakkaissuuntainen, tulee tulon eteen miinusmerkki. Lopuksi tulot lasketaan yhteen.



Kuva 11.23: Muistisäännöt 2×2 -determinantin ja 3×3 -determinantin laskemiseksi.

Determinantin merkitys näkyy siinä, että se kertoo matriisin kääntyvyydestä. Lauseen 9.12 nojalla 2×2 -matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $ad - bc \neq 0$. Toisaalta matriisin A determinantti on $ad - bc$. Matriisi A on siis kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$. Samanlainen tulos pätee myös 3×3 -matriisien determinanteille sekä myöhemmin määriteltäville suurempien matriisien determinanteille. Todistus on esitetty tämän luvun loppupuolella.

Lause 11.3. *Oletetaan, että A on $n \times n$ -matriisi. Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos* $\det(A) \neq 0$.

Esimerkki 11.4. Tutkitaan, onko vektorijono $((2, 1, -1), (0, 1, -3), (-2, 1, -7))$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Kyseessä on kanta, mikäli jokainen vektori $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ voidaan ilmaista annettujen vektorien lineaarikombinaationa. Tutkittava yhtälöryhmä voidaan ilmaista matriisimuodossa $A\bar{x} = \bar{w}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos kerroinmatriisi A on kääntyvä (lause 10.1). Toisaalta lauseen 11.3 nojalla A on kääntyvä, jos ja vain jos sen determinantti on nollasta poikkeava. Lasketaan determinantti:

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} &= 2\big(1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-3)\big) - 0 - 2\big(1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)\big) \\ &= 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2) = 0. \end{aligned}$$

Koska determinantti on 0, matriisi A ei ole kääntyvä. Tästä syystä tutkittavan yhtälöryhmän ratkaisua ei ole olemassa tai se ei ole yksikäsitteinen. Annettu vektorijono ei siis muodosta kantaa.

11.2 Determinantin kehityskaavat

Suurempien matriisien determinantit voidaan laskea pienempien matriisien determinanttien avulla.

Määritelmä 11.5. Olkoon A jokin $n \times n$ -matriisi. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Jos $n = 1$, niin $\det(A) = a_{11}$. Jos taas $n > 1$, niin

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake.

Yleisen determinantin määritelmä ei ole ristiriidassa aiempien determinantin määritelmien kanssa. Esimerkiksi 3×3 -matriisin determinantti on uuden määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).\end{aligned}$$

Määritelmässä olevat kertoimet $a_1 j$ otetaan matriisin ensimmäiseltä riviltä. Sanotaan, että determinantti on tällöin *kehitetty ensimmäisen rivin suhteen.* Yhtä hyvin voidaan käyttää muita rivejä tai jopa muita sarakkeita.

Lause 11.6. *Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Merkitään $A(i, j) = a_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*

a) Olkoon $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake. Kyseessä on kehitys rivin i suhteen.

b) Olkoon $j \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake. Kyseessä on kehitys sarakkeen j suhteen.

Todistuksen idea. Lause voidaan todistaa tarkastelemalla, millaiseen lausekkeeseen määritelmän kehityskaava lopulta johtaa. Lauseke koostuu tuloista

$$\pm a_{ik_1} a_{ik_2} \cdots a_{ik_n},$$

missä $k_1, \ldots, k_n$ ovat sarakkeiden indeksit jossakin järjestyksessä. Esimerkiksi tyypin 3×3 matriisin determinantin laskeminen johtaa näillä merkinnöillä lausekkeeseen

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Kunkin termin etumerkki määräytyy siitä, onko sarakkeiden uusi järjestys alkuperäisen järjestyksen ns. parillinen vai pariton permutaatio. Tämän havainnon jälkeen on suoraviivaista tarkistaa, että jokainen kehityskaava johtaa itse asiassa täsmälleen samaan lausekkeeseen. $\square$

Toisinaan voi säästää vaivaa, jos valitsee viisaasti rivin tai sarakkeen, jonka suhteen determinantin kehittää. Lasketaan matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

determinantti kehittämällä se aluksi kolmannen rivin ja välivaiheessa kolmannen sarakkeen suhteen:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\left(0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&= -(0 + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2)) = -(0 - 3 - 1) = 4.
\end{aligned}$$

Kehityskaavojen etumerkkien vaihtelu (eli kaavoissa muotoa $(-1)^{i+j}$ oleva kerroin) saadaan shakkilautaa muistuttavasta kuviosta:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Matriisin tilalle ajatellaan plus- ja miinusmerkeistä koostuva ruudukko, jonka vasemmassa yläkulmassa on plusmerkki. Jos matriisin alkion kohdalla on plusmerkki, tulee kehityskaavassa alkion eteen plusmerkki. Vastaavasti, jos alkion kohdalla on miinusmerkki, tulee kehityskaavaankin miinusmerkki. Kunkin alkion omaa etumerkkiä ei myöskään sovi unohtaa.

11.3 Determinantin ominaisuuksia

Tarkastellaan vielä, miten determinantti suhtautuu matriisien alkeisrivitoimitukseen sekä laskutoimituksiin. Seuraavan, alkeisrivitoimituksia koskevan lauseen todistuksen voi johtaa suoraan determinanttien kehityskaavoista.

Lause 11.7. *Oletetaan, että A on neliömatriisi.*

1) *Jos matriisi B saadaan matriisista A vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin* $\det(B) = -\det(A)$.
2) *Jos matriisi B saadaan matriisista A kertomalla jokin rivi nollasta poikkeavalla reaaliluvulla t, niin* $\det(B) = t\det(A)$.
3) *Jos matriisi B saadaan matriisista A lisäämällä johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla k kerrottuna, niin* $\det(B) = \det(A)$.

Lauseen 11.10 kohdasta a) seuraa, että determinantin sarakkeet käyttäytyvät täsmälleen samalla tavalla kuin sen rivit. Lauseesta 11.7 saadaan siis seuraavat muistisäännöt:

1) Jos matriisin kaksi riviä (tai saraketta) vaihtaa keskenään, determinantin etumerkki muuttuu:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

2) Jos matriisin rivillä (tai sarakkeessa) kaikilla alkioilla on yhteinen nollasta poikkeava tekijä, tuon yhteisen tekijän voi ottaa determinantin eteen kertoimeksi:
$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

3) Jos matriisin riviin (tai sarakkeeseen) lisätään jokin toinen rivi (tai sarake) vakiolla kerrottuna, matriisin determinantti ei muutu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Lauseesta seuraa myös, että eräiden matriisien determinantti on helppo määrittää suoraan matriisista.

Lause 11.8. *Oletetaan, että A on neliömatriisi. Tällöin*

1) *jos matriisissa A on nollarivi (nollasarake), niin* $\det(A) = 0$
2) *jos matriisissa A on kaksi samaa riviä (samaa saraketta), niin* $\det(A) = 0$
3) *jos A on kolmiomatriisi eli kaikki lävistäjän alapuoliset tai yläpuoliset alkiot ovat nollia, niin matriisin A determinantti on lävistäjäalkioiden tulo.*

Todistus. Osoitetaan vain rivejä koskevat väitteet. Sarakkeita koskevat väitteet voidaan todistaa samalla tavalla.

1) Kerrotaan matriisin nollarivi luvulla -1, jolloin matriisi ei muutu. Edeltävän lauseen mukaan $\det(A) = -1 \cdot \det(A)$, josta seuraa, että $\det(A) = 0$.
2) Vaihdetaan matriisin samanlaiset rivit keskenään, jolloin matriisi ei muutu. Edeltävän lauseen mukaan $\det(A) = -1 \cdot \det(A)$, joten $\det(A) = 0$.
3) Tulos nähdään suoraan kehittämällä matriisi rivi riviltä alkaen ylimmästä tai alimmasta, jolla on vain yksi nollasta poikkeava alkio. □

Edeltäviä lauseita voidaan käyttää hyväksi determinantin laskemisessa. Kun matriisi muutetaan porrasmatriisiksi alkeisrivitoimitusten avulla, determinantti muuttuu lauseessa 11.7 kuvatulla tavalla. Porrasmatriisin determinantti voidaan puolestaan määrittää lauseen 11.8 avulla.

Esimerkki 11.9. Lasketaan matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

determinantti muuntamalla se vaiheittain porrasmatriisiksi. Tarvittavat alkeisrivitoimitukset on esitetty alla:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-3R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Tuloksena on yläkolmiomatriisi, jonka determinantti on lävistäjäalkioiden tulo eli -48. Lauseen 11.7 alkeisrivitoimituksista ainoastaan viimeinen muutti matriisin determinanttia, ja se aiheutti vain etumerkin muutoksen. Siispä alkuperäisen matriisin determinantti oli 48.

Alkeisrivitoimituksia tarkastelemalla voidaan todistaa myös kääntyvän matriisin determinanttiin liittyvä lause.

Lauseen 11.3 todistus. Neliömatriisi A on kääntyvä täsmälleen silloin, kun se voidaan muuttaa alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, muuten porrasmatriisiin tulee nollarivi. Ykkösmatriisin determinantti on 1 ja nollarivin omaavan matriisin 0.

Toisaalta jokainen alkeisrivitoimitus säilyttää determinantin nollana tai nollasta poikkeavana sen mukaan, mitä se oli alun perin. Täten matriisi A on kääntyvä täsmälleen silloin, kun sen determinantti on nollasta poikkeava. □

Tarkastellaan vielä matriisien laskutoimituksien vaikutusta determinanttiin.

Lause 11.10. *Oletetaan, että A ja B ovat neliömatriiseja. Tällöin*

a) $\det(A^\top) = \det(A)$

b) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Todistuksen idea.

a) Tulos seuraa siitä, että determinantit voidaan kehittää yhtä hyvin sarakkeiden kuin rivienkin suhteen.

b) Jos jompikumpi tai molemmat matriiseista A ja B eivät ole kääntyviä, voidaan osoittaa, että myöskään niiden tulo ei ole kääntyvä. Tällöin väite pätee lauseen 11.3 perusteella. Oletetaan sitten, että A ja B ovat kääntyviä ja kirjoitetaan ne alkeismatriisien tuloina:

$$A = E_1 \cdots E_r \quad \text{ja} \quad B = F_1 \cdots F_s.$$

Lauseesta 11.7 seuraa, että jos E on alkeismatriisi, jokaiselle neliömatriisille M pätee

$$\det(EM) = \det(E)\det(M).$$

Käyttämällä tätä havaintoa toistuvasti yllä esitettyihin tuloihin, nähdään, että

$$\det(A) = \det(E_1)\cdots\det(E_r) \quad \text{ja} \quad \det(B) = \det(F_1)\cdots\det(F_s).$$

Toisaalta samalla tavoin

$$\det(AB) = \det(E_1)\cdots\det(E_r)\cdot\det(F_1)\cdots\det(F_s),$$

joten väite seuraa. □

Lause 11.11. *Oletetaan, että neliömatriisi A on kääntyvä. Tällöin*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Todistus. Oletuksen mukaan matriisi A on kääntyvä, joten sillä on käänteismatriisi A^{-1}. Edellisen lauseen b)-kohdan nojalla pätee

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Toisaalta lauseen 11.3 mukaan $\det(A) \neq 0$, sillä A on kääntyvä. Jakamalla puolittain saadaan $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. □

12 Ominaisarvot ja diagonalisointi[2]

Tässä luvussa tarkastellaan neliömatriisin ominaisarvoja ja diagonalisointia. Sovelluksena esitetään laskumenetelmä diagonalisoituvan matriisin potensseille. Ominaisarvoja tarkastellaan lisää kurssin toisessa osassa.

12.1 Ominaisarvon määritelmä

Matriisin ominaisarvoista puhutaan silloin, kun matriisilla kertominen vaikuttaa johonkin vektorin samalla tavalla kuin skalaarilla kertominen. Tuo vektori on silloin matriisin ominaisvektori ja vastaava skalaari on matriisin ominaisarvo.

Määritelmä 12.1. Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

Huom. 1. Edellinen määritelmä on sekä ominaisarvon että ominaisvektorin määritelmä. Ominaisarvoa ei voida määritellä ilman ominaisvektoreita eikä ominaisvektoreista voida puhua mainitsematta, mihin ominaisarvoon ne liittyvät.

Huom. 2. Nollavektorin ei haluta olevan ominaisvektori, sillä jos niin olisi, kaikki reaaliluvut olisivat kaikkien matriisien ominaisarvoja, koska $A\bar{0} = \lambda\bar{0}$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 12.2. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo 4, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eräs ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori on siis $(1, 1)$.

Samaa ominaisarvoa voi vastata useampi eri ominaisvektori. Esimerkiksi $(2, 2)$ on myös matriisin A ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Matriisilla A on toinenkin ominaisarvo. Huomataan nimittäin, että

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Siten myös luku 2 on matriisin A ominaisarvo.

[2] Tätä lukua ei ole vuoden 2012 materiaalissa.

Kuten edellinen esimerkki osoittaa, matriisilla voi olla useampi kuin yksi ominaisarvo. Kuhunkin ominaisarvoon liittyvät omat ominaisvektorit, ja myös niitä on kullakin ominaisarvolla useita.

12.2 Ominaisarvojen löytäminen

Ominaisarvojen ja ominaisvektoreiden löytäminen perustuu yhtälön

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0} \tag{9}$$

ratkaisemiseen. Ominaisvektoria $\bar{v}$ ei kuitenkaan voida ratkaista ennen kuin tunnetaan ominaisarvo λ. Sen löytämiseksi muutetaan yhtälö hieman toiseen muotoon. Ensinnäkin huomataan, että $\lambda\bar{v} = \lambda I\bar{v}$, missä I on ykkösmatriisi. Näin ollen

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = A\bar{v} - \lambda I\bar{v} = (A - \lambda I)\bar{v}.$$

Nyt yhtälö (9) tulee muotoon

$$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}. \tag{10}$$

Yhtälöä (10) vastaa homogeeninen yhtälöryhmä, joten sillä on aina triviaaliratkaisu $\bar{v} = \bar{0}$. Tämä ei kuitenkaan kelpaa ominaisvektoriksi, joten tavoitteena on löytää jokin epätriviaali ratkaisu. Lauseen 10.7 nojalla yhtälöllä on epätriviaaleja ratkaisuja täsmälleen silloin, kun kerroinmatriisi $A - \lambda I$ ei ole kääntyvä. Toisaalta lauseen 11.3 mukaan neliömatriisi ei ole kääntyvä täsmälleen silloin, kun sen determinantti on 0. Näin saadaan seuraava lause.

Lause 12.3. *Reaaliluku λ on neliömatriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esimerkki 12.4. Määritetään esimerkin 12.2 matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Lähdetään liikkeelle laskemalla lauseessa 12.3 mainittu determinantti:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

Ominaisarvot ovat nyt toisen asteen yhtälön $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ ratkaisut. Ne ovat $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = 2$.

Määritetään vielä ominaisvektorit. Kumpaakin ominaisarvoa vastaavat omat ominaisvektorinsa. Tarkastellaan ensin ominaisarvoa λ_1. Tällöin ratkaistavana on yhtälö $(A - 4I)\bar{v} = \bar{0}$. Muutetaan matriisi $A - 4I$ redusoituun porrasmuotoon:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2+R1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1\leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Redusoidusta porrasmuodosta nähdään, että v_2 on vapaa muuttuja ja $v_1 - v_2 = 0$. Ominaisvektorit ovat siis muotoa (t, t), missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tarkastellaan sitten ominaisarvoa $\lambda_2 = 2$. Nyt ratkaistavana oleva yhtälö on $(A - 2I)\bar{v} = \bar{0}$. Muutetaan matriisi $A - 2I$ redusoituun porrasmuotoon:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2-R1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jälleen nähdään, että v_2 on vapaa muuttuja ja $v_1 + v_2 = 0$. Tällä kertaa ominaisvektorit ovat siis muotoa $(t, -t)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Huom. Jos λ on matriisin A ominaisarvo, yhtälöllä 10 on äärettömän monta ratkaisua. Itse asiassa jokainen ominaisvektorin $\bar{v}$ skalaarimonikerta on myös ominaisvektori, sillä $A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = c(\lambda\bar{v}) = \lambda(c\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$.

Lauseke $\det(A - \lambda I)$ on eräs muuttujan λ polynomi. Sitä nimitetään matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi.* Edellinen lause voidaan siis muotoilla myös niin, että matriisin A ominaisarvot ovat sen karakteristisen polynomin nollakohdat.

12.3 Diagonalisointi

Määritelmä 12.5. Neliömatriisia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kutsutaan *diagonalisoituvaksi*, jos on olemassa kääntyvä matriisi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja lävistäjämatriisi $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, joille pätee

$$P^{-1}AP = D.$$

Diagonalisoituvuuden määrittäminen perustuu seuraavaan tulokseen.

Lause 12.6. *Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos sillä on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Tällöin*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

missä matriisin $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sarakkeet koostuvat A:n lineaarisesti riippumattomista ominaisvektoreista ja $\lambda_1, \dots \lambda_n$ ovat niitä vastaavat ominaisarvot samassa järjestyksessä.

Todistuksen idea. Merkitään matriisin A lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$. Nämä siis muodostavat matriisin P sarakkeet. Siitä, että kyseiset sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat, voidaan johtaa, että homogeenisella yhtälöryhmällä $P\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaaliratkaisu. Tästä puolestaan seuraa, että P on kääntyvä.

Matriisikertolaskun määritelmästä seuraa, että matriisin AP i:s sarake on $A\bar{v}_i$ ja että matriisin PD vastaava sarake on $\lambda_i\bar{v}_i$. Koska $A\bar{v}_i = \lambda_i\bar{v}_i$, saadaan yhtälö $AP = PD$. Väite seuraa, kun kerrotaan tämä yhtälö vasemmalta matriisilla P^{-1}. □

Esimerkki 12.7. Esimerkin 12.4 matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit $(1, 1)$ ja $(1, -1)$, jotka vastaavat ominaisarvoja 4 ja 2. Lauseen 12.6 nojalla A on diagonalisoituva. Muodostetaan ominaisvektoreista matriisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin P käänteismatriisi saadaan esimerkiksi lauseen 9.12 avulla. Se on

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan nyt tulo

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tuloksena on ominaisarvoista koostuva lävistäjämatriisi, aivan kuten pitääkin.

Esimerkki 12.8 (Diagonalisoituvan matriisin potenssit)**.** Jatketaan edellistä esimerkkiä ja lasketaan matriisin A seitsemäs potenssi. Suora matriisikertolasku olisi työläs suorittaa, mutta koska matriisi A on diagonalisoituva, voidaan käyttää hyväksi sen ominaisarvoja.

Ensinnäkin huomataan melko helposti, että

$$D^7 = \begin{bmatrix} 4^7 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16384 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix}.$$

(Vastaava pätee kaikille neliömatriiseille.) Toisaalta yhtälöstä $D = P^{-1}AP$ saadaan $A = PDP^{-1}$, ja

$$(PDP^{-1})^7 = PD \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{=I_2} DP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^7P^{-1}.$$

Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned} A^7 = (PDP^{-1})^7 = PD^7P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16384 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16384 & 128 \\ 16384 & -128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16512 & 16256 \\ 16256 & 16512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8256 & 8128 \\ 8128 & 8256 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisipotenssin laskeminen saatiin muutettua pariksi matriisikertolaskuksi sekä tavallisten kokonaislukujen potenssiksi. Samalla vaivalla voitaisiin laskea paljon suurempiakin potensseja. Tämä temppu onnistuu kuitenkin vain, jos alkuperäinen matriisi on diagonalisoituva.

13 Pistetulo

Avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ on totuttu puhumaan vektorien pituuksista ja vektoreiden välisistä kulmista. Kuten tavallista, näiden käsitteiden yleistäminen korkeampiulotteisiin avaruuksiin ei onnistu pelkästään geometrisen intuition avulla. Kuitenkin esimerkiksi Pythagoraan lauseen voidaan ajatella toimivan kaikissa ulottuvuuksissa samalla tavalla. Tämä ja muut tähän liittyvät käsitteet voidaan ilmaista pistetulon avulla, ja pistetulo puolestaan voidaan laskea avaruudessa $\mathbb{R}^n$, oli n miten suuri tahansa.

Määritelmä 13.1. Vektoreiden $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n.$$

Vektorien pistetulo on aina reaaliluku. Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ pistetulo on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 3 \cdot 1 + (-2)(-2) + 0 \cdot \sqrt{3} = 7.$$

Pistetulolle voidaan todistaa laskusääntöjä.

Lause 13.2. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$

Todistus. Todistetaan kohta b) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Merkitään $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ ja $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned}
\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) &= (v_1, \dots, v_n) \cdot (w_1 + u_1, w_2 + u_2, \dots, w_n + u_n) \\
&= v_1(w_1 + u_1) + v_2(w_2 + u_2) + \dots + v_n(w_n + u_n) \\
&= v_1 w_1 + v_1 u_1 + v_2 w_2 + v_2 u_2 + \dots + v_n w_n + v_n u_n \\
&= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n) + (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n) \\
&= \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}.
\end{aligned}$$

Tässä käytettiin reaalilukujen yhteenlaskun ja kertolaskun osittelulakia. □

Seuraava lause osoittaa, että vektorin pistetulo itsensä kanssa on aina epänegatiivinen. Ainoastaan nollavektorin pistetulo itsensä kanssa on nolla.

Lause 13.3. *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

a) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$

b) $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$*, jos ja vain jos* $\bar{v} = \bar{0}$.

Todistus.

a) Nähdään, että

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \geq 0 + 0 + \cdots + 0 = 0\,,$$

sillä reaaliluvun neliö on aina epänegatiivinen. Tämä todistaa väitteen.

b) "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$. Tällöin $v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = 0$. Koska jokainen yhteenlaskettava on epänegatiivinen, täytyy yhteenlaskettavien olla nollia. Toisin sanoen $v_i^2 = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tästä seuraa, että $v_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Siten $\bar{v} = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\bar{v} = \bar{0}$. Nyt $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 0$. Väite on todistettu. $\square$

13.1 Vektorin normi

Pistetulon avulla voidaan määritellä avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin normi eli pituus. Lauseen 13.3 nojalla $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$, joten seuraavassa määritelmässä juurrettava on epänegatiivinen, kuten kuuluu olla.

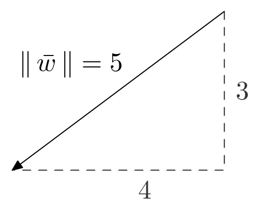
Määritelmä 13.4. Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli *pituus* on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Määritelmästä seuraa, että $\|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (1/2, 3, -2, 0)$ normi on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{(1/2)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{53}{4}} = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Tason vektoreiden normia voidaan havainnollistaa Pythagoraan lauseen avulla. Kuvassa 13.24 on esitetty vektori $\bar{w} = (-4, -3)$. Sen pituus on Pythagoraan lauseen nojalla $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Pituuden geometrinen tulkinta antaa siis saman tuloksen kuin määritelmä 13.4. Myös kolmiulotteisen avaruuden vektorin pituus on sama normin ja Pythagoraan lauseen avulla laskettuna.



Kuva 13.24: Vektorin $\bar{w}$ normi eli pituus.

Seuraava lause selittää normien avulla sen tosiasian, että vektorin pituus on aina epänegatiivinen ja nollavektori on ainoa vektori, jonka pituus on nolla.

Lause 13.5. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. *Tällöin*

a) $\|\bar{v}\| \geq 0$

b) $\|\bar{v}\| = 0$, *jos ja vain jos* $\bar{v} = 0$.

Todistus. Tulokset seuraavat suoraan normin määritelmästä, neliöjuuren ominaisuuksista ja lauseesta 13.3.

a) Määritelmän mukaan $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$. Neliöjuuren arvo on aina epänegatiivinen, joten $\|\bar{v}\| \geq 0$.

b) Huomataan, että $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = 0$, jos ja vain jos juurrettava $\bar{v} \cdot \bar{v}$ on nolla. Lauseen 13.3 nojalla taas $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$. Tämä todistaa väitteen. □

Lause 13.6. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $c \in \mathbb{R}$. *Tällöin* $\|c\bar{v}\| = |c|\|\bar{v}\|$.

Todistus. Pistetulon ominaisuuksien perusteella

$$\|c\bar{v}\| = \sqrt{c\bar{v} \cdot c\bar{v}} = \sqrt{c(\bar{v} \cdot c\bar{v})} = \sqrt{c^2(\bar{v} \cdot \bar{v})} = |c|\sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = |c|\|\bar{v}\|.$$ □

Usein ollaan kiinnostuneita erityisesti sellaisista vektoreista, joiden pituus on yksi. Tällöin on yleensä kyse tilanteesta, jossa vain vektorin suunnalla on merkitystä. Siksi pituus halutaan mahdollisimman yksinkertaiseksi.

Määritelmä 13.7. Vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on *yksikkövektori*, jos sen normi on yksi eli

$$\|\bar{u}\| = 1.$$

Esimerkiksi luonnollisen kannan vektorit $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ ovat yksikkövektoreita, samoin kuin vektorit $\bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$ aina, kun $1 \leq i \leq n$. Kaikkien yksikkövektoreiden komponentit eivät kuitenkaan ole näin yksinkertaisia.

Esimerkki 13.8. Etsitään yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen annetun vektorin $\bar{v} = (2, -1, 0)$ kanssa. Vektorin $\bar{v}$ normi on $\|\bar{v}\| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$. Jos vektori $\bar{v}$ kerrotaan skalaarilla $1/\sqrt{5}$, saadaan vektori $(1/\sqrt{5})\bar{v}$, jonka pituus on lauseen 13.6 nojalla

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\|\bar{v}\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1.$$

Vektori $(1/\sqrt{5})\bar{v}$ on siis yksikkövektori. Lisäksi vektorit $\bar{v}$ ja $(1/\sqrt{5})\bar{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

Edellistä esimerkkiä yleistämällä saadaan seuraava tulos.

Lause 13.9. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. *Tällöin vektori* $\dfrac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$ *on yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen* $\bar{v}$*:n kanssa.*

Todistus. Väite seuraa lauseesta 13.6 samalla tavalla kuin esimerkissä 13.8. □

Kun vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ tulkitaan tason pisteiksi, niiden välinen etäisyys voidaan määritellä niitä yhdistävän suuntajanan $\bar{v} - \bar{w}$ pituutena. Tämä taas palautuu vektorin normiin.

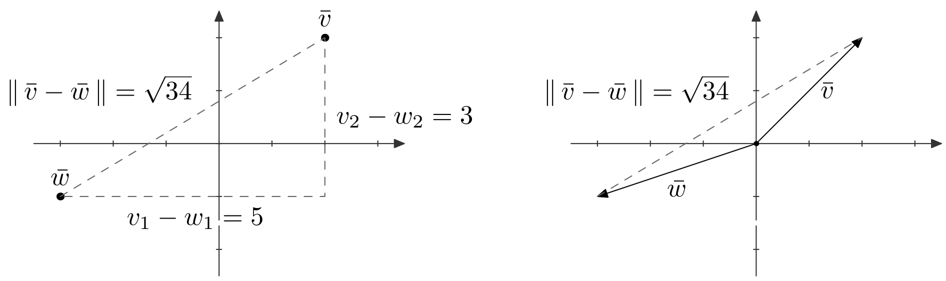
Määritelmä 13.10. Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen *etäisyys* on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\|.$$

Esimerkki 13.11. Vektoreiden $\bar{v} = (2, 2)$ ja $\bar{w} = (-3, -1)$ välinen etäisyys on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\| = \|(2 - (-3), 2 - (-1))\| = \|(5, 3)\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Etäisyyttä on havainnollistettu kahdella eri tavalla kuvassa 13.25.



Kuva 13.25: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen etäisyys. Ensimmäisessä kuvassa vektorit on havainnollistettu tason pisteinä, jälkimmäisessä kuvassa paikkavektoreina.

Seuraava lause esittelee yleisen teorian kannalta tärkeän tuloksen, jota tässä vaiheessa kuitenkin tarvitaan lähinnä lemman 13.13 todistamiseen. Todistus on melko tekninen, ja siksi sen esitystä lykätään kurssin toiseen osaan.

Lause 13.12 (Schwarzin epäyhtälö)**.** *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

13.2 Vektorien välinen kulma ja kohtisuoruus

Tasossa kahden vektorin välinen kulma voidaan laskea pistetulon avulla. Yleisessä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ tyydymme geometrisen perustelun sijasta *määrittelemään* vektorien välisen kulman vastaavalla tavalla. Tähän tarvitaan kuitenkin seuraavaa lemmaa.

Lemma 13.13. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin*

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|} \leq 1.$$

Todistus. Schwarzin epäyhtälön 13.12 mukaan $|\bar{v}\cdot\bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|$. Tästä seuraa, että

$$-\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \leq \bar{v}\cdot\bar{w} \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

Jakamalla näin saadut epäyhtälöt positiivisella luvulla $\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|$ saadaan

$$-1 \leq \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|} \leq 1. \qquad \square$$

Kosinifunktio on määritelty niin, että jokaista lukua $x \in [-1,1]$ vastaa täsmälleen yksi sellainen kulma α, että $0° \leq \alpha \leq 180°$ ja $\cos\alpha = x$. Edellisen lemman nojalla voidaan siis asettaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 13.14. Vektorien $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ välinen kulma on se kulma α, jolle pätee $0° \leq \alpha \leq 180°$ ja

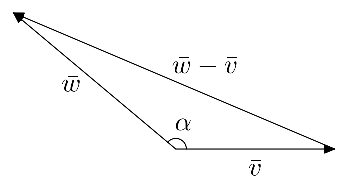
$$\cos\alpha = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}.$$

Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = (3,-2,0)$ ja $\bar{w} = (1,-2,\sqrt{3})$ välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{8}}.$$

Lisäksi täytyy päteä $0° \leq \alpha \leq 180°$. Laskimella saadaan vektorien välisen kulman likiarvoksi $\alpha \approx 46{,}65°$.

Määritelmän perustelu. Vaikka määritelmiä ei tarvitsekaan perustella mitenkään, on kuitenkin valaisevaa katsoa, miten vektorien välisen kulman määritelmä vastaa tasossa geometrista käsitystämme.



Kuva 13.26: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma kosinilauseen näkökulmasta.

Kosinilauseen mukaan kuvan 13.26 kolmiossa pätee

$$\|\bar{w}-\bar{v}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\alpha.$$

Toisaalta normin määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\|\bar{w}-\bar{v}\|^2 &= (\bar{w}-\bar{v})\cdot(\bar{w}-\bar{v}) = \bar{w}\cdot\bar{w} - \bar{w}\cdot\bar{v} - \bar{v}\cdot\bar{w} + \bar{v}\cdot\bar{v}\\ &= \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v}\cdot\bar{w}) + \|\bar{w}\|^2.\end{aligned}$$

Saadaan siis yhtälö

$$\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\alpha = \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v}\cdot\bar{w}) + \|\bar{w}\|^2,$$

josta edelleen

$$\cos\alpha = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}.$$

Vektorien pituuksien kohdalla erityisasemaan nostettiin yksikkövektorit. Kulmista puolestaan suora kulma on kaikkein tärkeimmässä asemassa. Jälleen kerran esitetään määritelmä yleisessä muodossaan ottamatta kantaa siihen, miltä suora kulma voisi moniulotteisessa avaruudessa "näyttää".

Määritelmä 13.15. Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0$. Tällöin merkitään $\bar{v} \perp \bar{w}$.

Yleensä kahden olion ajatellaan olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden välinen kulma on $90°$. Tämä pitää paikkansa myös vektoreiden tapauksessa. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Määritelmän 13.14 mukaan vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on $90°$, jos ja vain jos

$$\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|} = \cos 90° = 0.$$

Tämä puolestaan pätee, jos ja vain jos $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0$. Siten vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on $90°$, jos ja vain jos $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0$.

Pistetulon sovellus: normaalimuotoiset yhtälöt

Esimerkki 13.16. Tarkastellaan kaikkia avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita $\bar{v}$, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\bar{n} = (1, 2, 3)$ vastaan. Tällaiset vektorit toteuttavat yhtälön

$$\bar{n}\cdot\bar{v} = 0 \quad \text{eli} \quad v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0.$$

Vektorien muodostama joukko W voidaan kirjoittaa eri muodoissa:

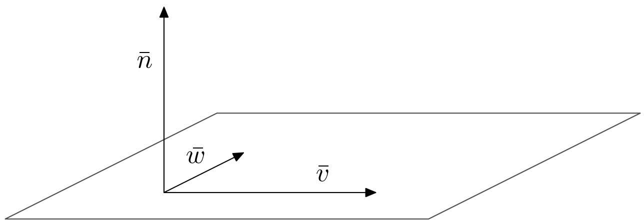
$$\begin{aligned} W &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = -2v_2 - 3v_3\} \\ &= \{(-2v_2 - 3v_3,\ v_2,\ v_3) \mid v_2, v_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v_2(-2, 1, 0) + v_3(-3, 0, 1) \mid v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Viimeisestä muodosta nähdään, että kyseessä on origon kautta kulkeva taso.

Edellistä esimerkkiä voidaan yleistää, jolloin nähdään, että kaikki jotakin nollavektorista poikkeavaa vektoria vastaan kohtisuorassa olevat avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorit muodostavat tietyn tason, joka on samalla aliavaruus. Päätellään seuraavaksi sama asia toiseen suuntaan.

Tarkastellaan aluksi origon kautta kulkevaa tasoa $\{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Jos jokin vektori $\bar{n}$ on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita vastaan, niin kaikille tason vektoreille $s\bar{v} + t\bar{w}$ pätee

$$\bar{n}\cdot(s\bar{v} + t\bar{w}) = s(\bar{n}\cdot\bar{v}) + t(\bar{n}\cdot\bar{w}) = s\cdot 0 + t\cdot 0 = 0.$$



Kuva 13.27: Tason normaali $\bar{n}$.

Vektori $\bar{n}$ on siis kohtisuorassa kaikkia tason vektoreita vastaan, jolloin sanotaan, että se on *kohtisuorassa tasoa vastaan*. Tällaista vektoria kutsutaan tason *normaaliksi* (ks. kuva 13.27).

Olkoon T avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, joka kulkee origon kautta, ja olkoon $\bar{q}$ jokin tason normaali. Voidaan osoittaa, että piste $\bar{q}$ on tasossa T, jos ja vain jos

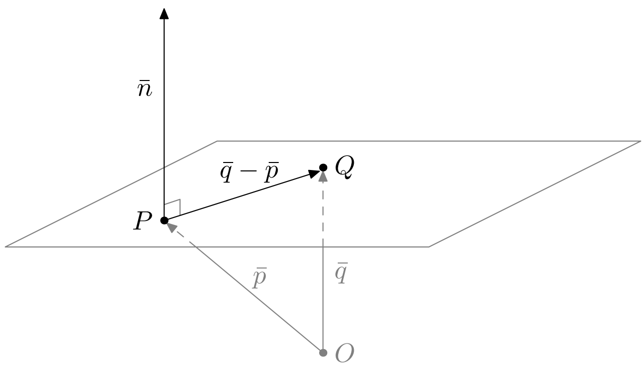
$$\bar{n} \cdot \bar{q} = 0.$$

Tällaista yhtälöä kutsutaan tason *normaalimuotoiseksi yhtälöksi*.

Jos taso ei kulje origon kautta, on sen vektoreita siirrettävä ennen normaalin määrittämistä. Oletetaan, että T on avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, jonka paikkavektori on $\bar{p}$ ja jolla on normaali $\bar{n}$. Nyt $\bar{q}$ on tasossa T, jos ja vain jos

$$\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}) = 0.$$

Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 13.28.



Kuva 13.28: Tason T normaalimuotoisen yhtälön havainnollistus.

Esimerkki 13.17. Oletetaan, että taso T kulkee pisteen $P = (6, 0, 1)$ kautta ja sillä on normaali $\bar{n} = (1, 2, 3)$. Tason T normaalimuotoinen yhtälö on tällöin

$$(1, 2, 3) \cdot (\bar{q} - (6, 0, 1)) = 0.$$

Tasossa T ovat siis ne pisteet $\bar{q}$, jotka toteuttavat edellä esitetyn yhtälön. Toisin sanoen

$$T = \{\bar{q} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 2, 3) \cdot (\bar{q} - (6, 0, 1)) = 0\}.$$

Kirjoitetaan taso vielä hiukan toisenlaisessa muodossa. Merkitään $\bar{q} = (x, y, z)$, missä $x, y, z \in \mathbb{R}$. Nyt

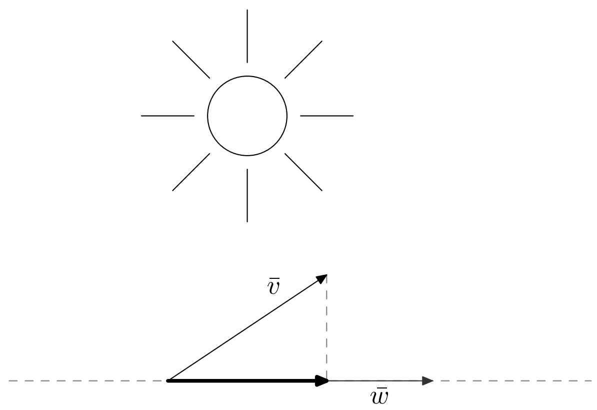
$$\begin{aligned}(1,2,3) \cdot (\bar{q} - (6,0,1)) &= (1,2,3) \cdot (x-6, y-0, z-1) \\ &= x - 6 + 2y + 3z - 3 \\ &= x + 2y + 3z - 9,\end{aligned}$$

joten voidaan kirjoittaa $T = \{\bar{q} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z - 9 = 0\}$.

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorille johdetaan normaalimuotoinen yhtälö samalla tavalla.

13.3 Projektio

Pistetulon avulla voidaan laskea myös vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle $\mathrm{span}(\bar{w})$ (eli vektorin $\bar{w}$ suuntaiselle suoralle). Voidaan ajatella, että projektio on vektorin $\bar{v}$ heittämä varjo, kun aurinko paistaa kohtisuoraan vektoria $\bar{w}$ vastaan kuten kuvassa 13.29.



Kuva 13.29: Projektion havainnollistus.

Projektion määritelmäksi valitsemme yksinkertaisuuden vuoksi kaavan, jolla projektion voi suoraan laskea.

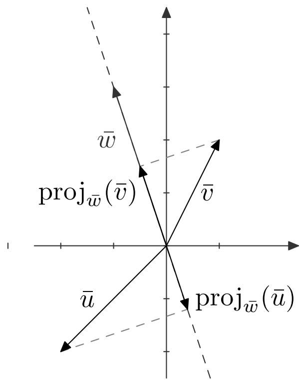
Määritelmä 13.18. Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ *projektio* vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Esimerkki 13.19. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (1, 2)$ projektio vektorin $\bar{w} = (-1, 3)$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{5}{10}(-1, 3) = \frac{1}{2}(-1, 3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Projektio on esitetty kuvassa 13.30.



Kuva 13.30: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ projektiot vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

Vektorin $\bar{u} = (-2, -2)$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on puolestaan

$$\text{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{-4}{10}(-1, 3) = -\frac{2}{5}(-1, 3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right).$$

Tämä on esitetty samassa kuvassa.

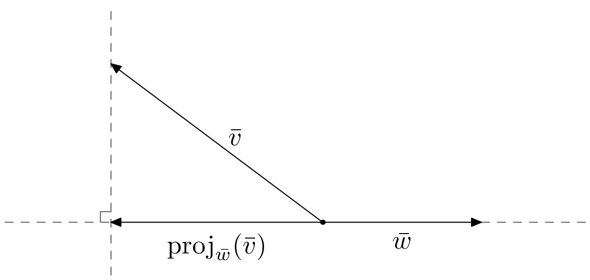
Lause 13.20. *Olkoot* $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$*. Oletetaan, että* $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ *on vektorin* $\bar{v}$ *projektio aliavaruudelle* $\text{span}(\bar{w})$*. Tällöin*

a) vektori $\bar{u}$ *on yhdensuuntainen vektorin* $\bar{w}$ *kanssa*

b) vektori $\bar{v} - \bar{u}$ *on kohtisuorassa vektoria* $\bar{w}$ *vastaan.*

Todistus. a) Määritelmästä nähdään, että $\bar{u} = \text{proj}_{\bar{w}}(v)$ on aina yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa. Vektori $\bar{u}$ saadaan nimittäin vektorista $\bar{w}$ kertomalla sitä skalaarilla $(\bar{v} \cdot \bar{w})/(\bar{w} \cdot \bar{w})$.

b) Jätetään lukijan harjoitustehtäväksi. □



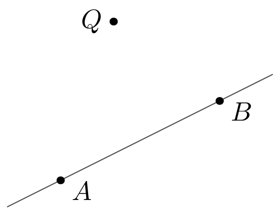
Kuva 13.31: Vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

Vektorin projektion voi määrittää myös geometrisesti (ks. kuva 13.31). Piirretään vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ alkamaan samasta pisteestä ja piirretään vektorin $\bar{w}$ suuntainen suora. Projektio $\text{proj}_{\bar{w}}(v)$ löydetään piirtämällä suora, joka on kohtisuorassa vektorin $\bar{w}$ suuntaista suoraa vastaan ja kulkee vektorin $\bar{v}$ kärjen kautta.

Projektion sovellus: pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyys suorasta voidaan määrittää projektion avulla. Pisteen Q etäisyys suorasta $S = \{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ on kaikkein lyhin välimatka, joka voi olla pisteen Q ja suoran S pisteen välillä. Täsmällisesti ilmaistuna pisteen Q etäisyys suorasta S on $\min\{d(\bar{q}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in S\}$, missä $\bar{q}$ on pisteen Q paikkavektori.

Tutkitaan esimerkin avulla, kuinka projektiota voidaan käyttää etäisyyden määrittämisessä, ilman tarkkoja todistuksia. Määritetään pisteen $Q = (4, -1, 9)$ etäisyys suorasta S, joka kulkee pisteiden $A = (2, -3, 5)$ ja $B = (4, 1, 7)$ kautta (ks. kuva 13.32).

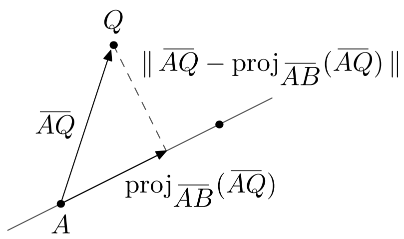


Kuva 13.32: Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora S.

Määritetään ensin vektori jostakin suoran pisteestä tutkittavaan pisteeseen. Esimerkiksi vektori

$$\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = (2, 2, 4)$$

käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan suoran suuntainen vektori, kuten vaikkapa vektori $\overline{AB} = (2, 4, 2)$.



Kuva 13.33: Pisteen Q etäisyys suorasta S.

Vektorin $\overline{AQ}$ projektio suoralle S on

$$\mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ}) = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{AB}} \overline{AB} = \frac{20}{24}(2, 4, 2) = \frac{5}{6}(2, 4, 2).$$

Erotus $\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})$ on kohtisuorassa suoraa S vastaan. Lasketaan erotus:

$$\begin{aligned}
\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ}) &= (2, 2, 4) - \frac{5}{6}(2, 4, 2) = \frac{6}{6}(2, 2, 4) - \frac{5}{6}(2, 4, 2) \\
&= \frac{1}{6}(12 - 10, 12 - 20, 24 - 10) = \frac{1}{6}(2, -8, 14) \\
&= \frac{1}{3}(1, -4, 7)
\end{aligned}$$

Koska $\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})$ on kohtisuorassa suoraa S vastaan, antaa erotusvektorin pituus pisteen Q etäisyyden suorasta:

$$\|\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})\| = \frac{1}{3}\|(1,-4,7)\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+16+49} = \frac{1}{3}\sqrt{66}.$$

Siten pisteen Q etäisyys suorasta S on $\frac{1}{3}\sqrt{66}$.

14 Ristitulo

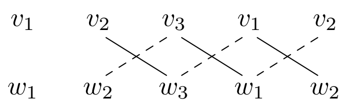
Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreille voidaan määritellä pistetulon lisäksi niin kutsuttu ristitulo. Pistetulosta poiketen ristitulon tulos ei ole reaaliluku vaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori. Ristitulosta on hyötyä esimerkiksi silloin, kun tarvitaan vektori, joka on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Ristitulo poikkeaa kaikista kurssilla tähän mennessä määritellyistä käsitteistä siinä, että sen määritelmää ei voida yleistää kaikkiin avaruuksiin $\mathbb{R}^n$. Ristitulo on nimenomaan kolmiulotteisen avaruuden laskutoimitus.

Määritelmä 14.1. Vektorien $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ *ristitulo* on vektori

$$\bar{v} \times \bar{w} = (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1).$$

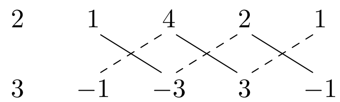
Ristitulon $\bar{v} \times \bar{w}$ laskemiseen voi käyttää kuvassa 14.34 esitettyä laskusääntöä. Yhtenäisellä viivalla yhdistettyjen komponenttien tulosta vähennetään katkoviivalla yhdistettyjen komponenttien tulo.



Kuva 14.34: Ristitulon $\bar{v} \times \bar{w}$ laskeminen.

Esimerkki 14.2. Merkitään $\bar{a} = (2, 1, 4)$ ja $\bar{b} = (3, -1, -3)$. Kuvan 14.35 perusteella voidaan laskea

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1),\ 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-3),\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) \\ &= (1, 18, -5). \end{aligned}$$



Kuva 14.35: Ristitulon $\bar{a} \times \bar{b}$ laskeminen.

Ristitulolle saadaan toinen muistisääntö determinantin avulla. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ristitulo saadaan laskemalla determinantti

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Tässä $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ ja $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$. Tarkalleen ottaen determinantin alkiot eivät voi olla vektoreita. Kyseessä on kuitenkin vain muistisääntö, ja vektoreiden $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ja $\bar{e}_3$ ajatellaan käyttäytyvän determinanttia laskettaessa reaalilukujen tavoin.

Esimerkki 14.3. Esimerkiksi vektoreiden $\bar{a} = (2, 1, 4)$ ja $\bar{b} = (3, -1, -3)$ ristitulo on

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \bar{e}_1\big(1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1)\big) - \bar{e}_2\big(2 \cdot (-3) - 4 \cdot 3\big) + \bar{e}_3\big(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3\big) \\
&= \bar{e}_1 - 18\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3 = (1, 18, -5).
\end{aligned}$$

Eräs ristitulon sovelluksista on se, että sen avulla voidaan löytää vektori, joka on kohtisuorassa yhtä aikaa kahta vektoria vastaan.

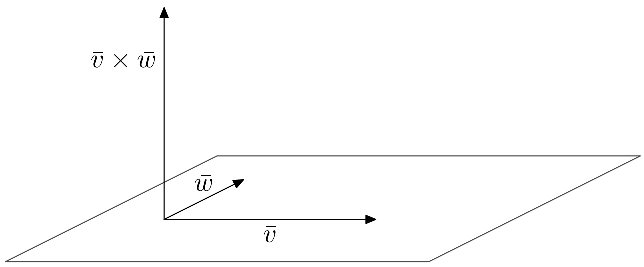
Lause 14.4. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin*

$$(\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{v} \quad \textit{ja} \quad (\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{w}.$$

Todistus. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{v} &= (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1) \cdot (v_1, v_2, v_3) \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)v_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)v_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)v_3 \\
&= v_2w_3v_1 - v_3w_2v_1 + v_3w_1v_2 - v_1w_3v_2 + v_1w_2v_3 - v_2w_1v_3 = 0.
\end{aligned}$$

Siten vektorit $(\bar{v} \times \bar{w})$ ja $\bar{v}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väitteen toinen osa osoitetaan samalla tavalla. □

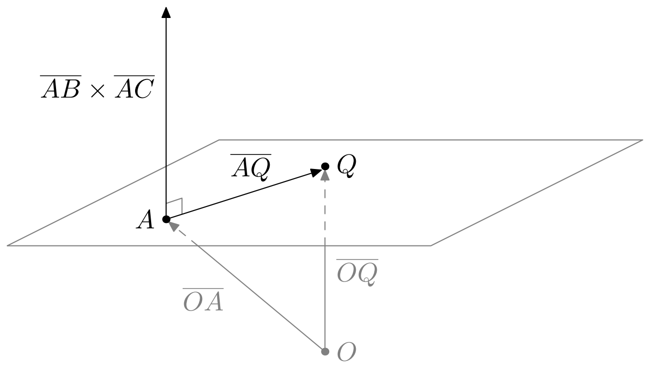


Kuva 14.36: Ristitulo $\bar{v} \times \bar{w}$ on kohtisuorassa vektoria $\bar{v}$ ja vektoria $\bar{w}$ vastaan.

Edellisestä lauseesta seuraa, että ristitulon avulla voidaan löytää tason normaali (eli vektori, joka on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan). Tästä on hyötyä tason normaalimuotoisen yhtälön määrittämisessä.

Esimerkki 14.5. Määritetään normaalimuotoinen yhtälö tasolle T, joka kulkee pisteiden $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ ja $C = (-2, 0, 1)$ kautta. Tätä varten tarvitaan tason T normaali. Normaali on vektori, joka on kohtisuorassa suuntavektoreita vastaan. Valitaan suuntavektoreiksi suuntajanat $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$ ja $\overline{AC} = (-2, -1, 1)$, jolloin normaaliksi käy edellisen lauseen nojalla vektorien ristitulo

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (4, -3, 5).$$



Kuva 14.37: Tason T normaalimuotoisen yhtälön määrittäminen.

Lisäksi tarvitaan jokin tason paikkavektori, kuten esimerkiksi $\overline{OA} = (0, 1, 0)$. Kun merkitään vielä $\bar{q} = \overline{OQ} = (x, y, z)$, tason normaalimuotoiseksi yhtälöksi saadaan

$$\underbrace{(\overline{AB} \times \overline{AC})}_{\text{normaali}} \cdot (\overline{OQ} - \overline{OA}) = 0.$$

Kun yhtälöön sijoitetaan luvut, se tulee muotoon

$$(4, -3, 5) \cdot (x, y - 1, 0) = 0.$$

Laskemalla pistetulo saadaan yhtälö lopulliseen muotoon

$$4x - 3y + 5z + 3 = 0.$$

Näin ollen $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 3y + 5z + 3 = 0\}$.

Esimerkki 14.6. Pisteen etäisyys tasosta voidaan määrittää ristitulon ja projektion avulla. Merkitään $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ ja $C = (-2, 0, 1)$. Oletetaan, että taso T kulkee pisteiden A, B ja C kautta. Määritetään pisteen $D = (1, 2, 3)$ etäisyys tasosta T (ks. kuva 14.38).

Tason suuntaisten vektoreiden $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$ ja $\overline{AC} = (-2, -1, 1)$ ristitulo

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (4, -3, 5)$$

on tason normaali. Lisäksi tarvitaan vektori jostakin tason pisteestä pisteeseen $D = (1, 2, 3)$. Valitaan vektori

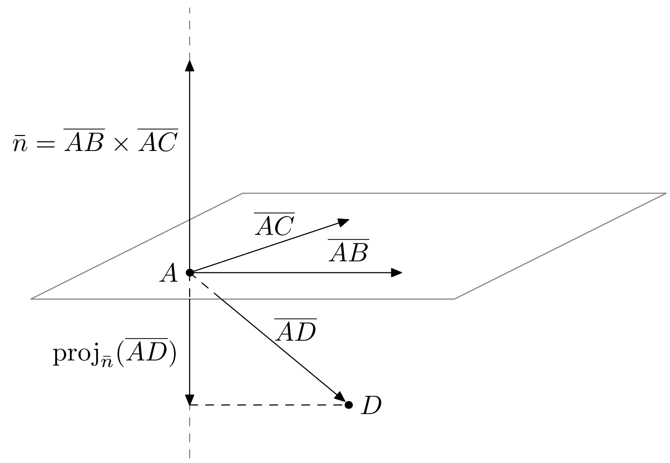
$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (1, 1, 3).$$

Vektorin $\overline{AD}$ projektio normaalin $\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD}) = \frac{\overline{AD} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}}\, \bar{n} = \frac{16}{50}\,(4, -3, 5) = \frac{8}{25}\,(4, -3, 5).$$

Tämän projektion normi (eli pituus) on pisteen P etäisyys tasosta T:

$$\|\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD})\| = \frac{8}{25}\,\|(4, -3, 5)\| = \frac{8}{25}\sqrt{16 + 9 + 25} = \frac{8}{25}\sqrt{50} = \frac{8}{5}\sqrt{2}.$$



Kuva 14.38: Pisteen D etäisyys tasosta T.

Käydään vielä läpi muutamia ristituloon liittyviä laskusääntöjä.

Lause 14.7. *Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $\bar{v} \times \bar{w} = -(\bar{w} \times \bar{v})$ *(antikommutointi)*

b) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$ *(osittelulaki)*

c) $(\bar{v} + \bar{w}) \times \bar{u} = \bar{v} \times \bar{u} + \bar{w} \times \bar{u}$ *(osittelulaki)*

d) $c(\bar{v} \times \bar{w}) = (c\bar{v}) \times \bar{w} = \bar{v} \times (c\bar{w})$

e) $\bar{v} \times \bar{v} = \bar{0}$

f) $\bar{0} \times \bar{v} = \bar{0}$ *ja* $\bar{v} \times \bar{0} = \bar{0}$

g) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

Todistus. Lauseen todistus on suoraviivainen ja käyttää ainoastaan ristitulon määritelmää. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Ristitulolla on myös pistetuloon liittyviä laskusääntöjä.

Lause 14.8. *Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin*

a) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}$

b) $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$

c) $\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2$ *(Lagrangen identiteetti)*

Todistus. Osoitetaan kohta c) (eli Lagrangen identiteetti) ja jätetään muut kohdat harjoitustehtäviksi. Käyttämällä lauseen 14.7 kohtaa g) ja lauseen 14.8 kohtaa a) saadaan

$$\begin{aligned}
\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \big((\bar{v} \times \bar{w}) \times \bar{v}\big) \cdot \bar{w} \\
&= \big((\bar{v} \cdot \bar{v})\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}\big) \cdot \bar{w} = \big(\|\bar{v}\|^2\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}\big) \cdot \bar{w} \\
&= \|\bar{v}\|^2(\bar{w} \cdot \bar{w}) - (\bar{v} \cdot \bar{w})(\bar{v} \cdot \bar{w}) = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2.
\end{aligned}$$

Siten Lagrangen identiteetti pätee. $\square$

Lause 14.9. *Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Jos $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$, niin*

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha,$$

missä α on vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma.

Todistus. Todistuksessa käytetään Lagrangen identiteettiä (lause 14.8). Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan $\cos \alpha = (\bar{v} \cdot \bar{w})/(\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|)$, ja lisäksi pätee $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Nyt Lagrangen identiteetistä saadaan

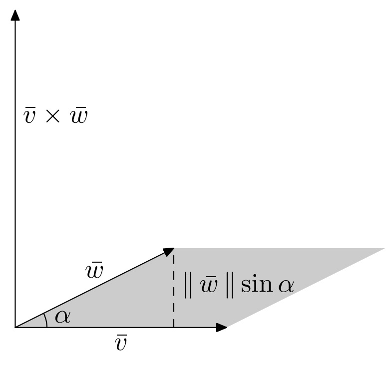
$$\begin{aligned}
\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\cos \alpha \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|)^2 \\
&= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - \cos^2 \alpha \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2(1 - \cos^2 \alpha) \\
&= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 \sin^2 \alpha = (\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha)^2.
\end{aligned}$$

Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan $0° \leq \alpha \leq 180°$, mistä seuraa, että $\sin \alpha \geq 0$. Lisäksi vektorien normit ovat aina epänegatiivisia. Siten $\|\bar{v} \times \bar{w}\| \geq 0$ ja $\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha \geq 0$. Saadusta yhtälöstä voidaan näin ollen päätellä, että

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha.$$

Tämä todistaa väitteen. $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa, että ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala (ks. kuva 14.39). Oletetaan, että vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on α. Tällöin suunnikkaan korkeus on $\|\bar{w}\| \sin \alpha$. Näin suunnikkaan pinta-alaksi saadaan $\|\bar{w}\| \sin \alpha \cdot \|\bar{v}\| = \|\bar{v} \times \bar{w}\|$.



Kuva 14.39: Ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala.

Ristitulon avulla voidaan määrittää myös suuntaissärmiön tilavuus. Vektoreiden $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ määräämään suuntaissärmiön tilavuus on pohjan pinta-alan $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$

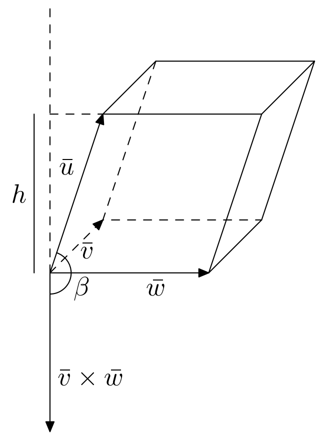
ja korkeuden h tulo (ks. kuva 14.40). Pohjan pinta-alan tiedetään edellisen kappaleen perusteella olevan $\|\bar{v}\times\bar{w}\|$. Määritetään vielä korkeus h. Olkoon β vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}\times\bar{w}$ välinen kulma. Nyt

$$h = \|\bar{u}\| \, |\cos(180^\circ - \beta)| = \|\bar{u}\| \, |\cos\beta| \, .$$

Siten tilavuus on

$$\|\bar{v}\times\bar{w}\|\|\bar{u}\| \, |\cos\beta| = \Big| \|\bar{v}\times\bar{w}\|\|\bar{u}\| \cos\beta \Big| = \Big| (\bar{v}\times\bar{w})\cdot\bar{u} \Big| .$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}\times\bar{w}$ välisen kulman määritelmää. Suunnikkaan tilavuus on siis niin kutsutun *skalaarikolmitulon* itseisarvo.



Kuva 14.40: Vektoreiden $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ määräämään suuntaissärmiön tilavuus.