

## Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

Avoin yliopisto, HY

Valmentavia tehtäviä

19.8.2013

1. Olkoon  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineaarikuvaus, jolle pätee  $L(1, 0, 0) = (1, 1)$ ,  $L(0, 1, 0) = (3, 0)$  ja  $L(0, 0, 1) = (-2, 4)$ . Määritä  $L(2, -1, 3)$ .

2. Tutkitaan kuvausta

$$L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(a, b, c, d) = (a + b + d, -b + c - d, a + c).$$

- (a) Määritä kuvauksen  $L$  ydin.
  - (b) Etsi virittäjät ytimelle  $\text{Ker } L$ .
  - (c) Mikä on ytimen  $\text{Ker } L$  dimensio?
3. Oletetaan, että  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  on lineaarikuvaus, jolle pätee  $L(1, 0) = (1, 0, -4)$  ja  $L(2, 1) = (-2, 3, 2)$ . Määritä vektorin  $(4, 2)$  kuvavektori lineaarikuvauksessa  $L$ .

4. Tutkitaan kuvausta

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2) = (-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 4x_2, x_1 - 2x_2).$$

- (a) Määritä kuvauksen  $L$  kuva ja etsi sille virittäjät.
- (b) Mikä on kuvan  $\text{Im } L$  dimensio?

5. Tutkitaan matriisiin

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta  $L_D: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(\bar{x}) = D\bar{x}$ .

- (a) Määritä luonnollisen kannan vektoreiden  $\bar{e}_1$  ja  $\bar{e}_2$  kuvat kuvauksessa  $L_D$ .
  - (b) Miten kantavektorien kuvavektorit näkyvät matriisissa  $D$ ?
6. Tutkitaan kuvausta

$$T: \mathcal{P}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a - c & b \\ a + c & a - c \end{bmatrix}.$$

- (a) Osoita, että  $T$  on lineaarikuvaus.
  - (b) Määritä kuvauksen  $T$  ydin.
  - (c) Etsi jotkin virittäjät kuvalle  $\text{Im } T$ .
  - (d) Määritä ytimen  $\text{Ker } T$  ja kuvan  $\text{Im } T$  dimensiot.
7. Onko olemassa vektoriavaruuksien välistä kuvausta, joka toteuttaa lineaarikuvauksen ehdoista ensimmäisen mutta ei jälkimmäistä? Entä sellaista, joka toteuttaa jälkimmäisen ehdon, mutta ei ensimmäistä?