Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Avoin yliopisto, HY
Valmentavia tehtäviä
13.8.2013

1. Tutkitaan lineaarikuvausta
$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 - x_2).$$
Keksi neljä vektoria, jotka kuvautuvat nollavektoriksi kuvauksessa L.

2. Tutkitaan lineaarikuvausta
$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2, x_1 - x_2).$$
Keksi neljä vektoria, jotka ovat kuvauksen L kuvajoukossa
$$\{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in \mathbb{R}^n\}.$$

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kuvautuuko kaikille maalijoukon $\mathbb{R}^3$ alkioille jotakin kuvauksessa L?

4. Merkitään $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Tutkitaan matriisista A saatavaa lineaarikuvausta $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$. Määritä $L_A(0, 1)$ ja $L_A(2, -1)$.

5. Kuvaile geometrisesti, mitä edellisen tehtävän kuvaus L_A tekee tason vektoreille.

6. Merkitään $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tutkitaan matriisista B saatavaa lineaarikuvausta $L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Kuvaile geometrisesti, mitä kuvaus L_B tekee tason vektoreille.

7. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Osoita, että joukko $\{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A(\bar{v}) = \bar{0}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

8. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on kanta $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$. Tutkitaan kuvausta
$$K\colon V \to \mathbb{R}^n, \quad \bar{x} \mapsto [\bar{x}]_{\mathcal{B}}.$$
   (a) Oletetaan, että $V = \mathcal{P}^2$ ja $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Määritä $K(x^3 - 4x^2 + 1)$.
   (b) Osoita, että K on lineaarikuvaus.