Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Avoin yliopisto, HY
Valmentavia tehtäviä
12.8.2013

1. Merkitään $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_1 = (1, 0)$, $\bar{v}_2 = (1, 2)$ ja $\bar{v}_3 = (2, 2)$. Määritä tulot $A\bar{v}_1$, $A\bar{v}_2$ ja $A\bar{v}_3$.

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Piirrä koordinaatistoon vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ sekä $A\bar{v}_1$, $A\bar{v}_2$ ja $A\bar{v}_3$. Mitä huomaat?

   Tehtävissä 3–4 tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja $\mathcal{S} = ((1, 0), (1, 1))$ ja $\mathcal{T} = ((0, 1), (2, 3))$.

3. Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ koordinaatit kannan $\mathcal{S}$ suhteen ovat 5 ja -1. Piirrä kuva kannasta S ja vektorista $\bar{v}$. Miten kuvassa näkyvät vektorin $\bar{v}$ koordinaatit?

4. Vektorin $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ koordinaatit kannan $\mathcal{S}$ suhteen ovat 1 ja 3. Mitkä ovat vektorin $\bar{a}$ koordinaatit kannan $\mathcal{T}$ suhteen?

5. Kuvausten $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhdistetty kuvaus $f \circ g$ määritellään ehdolla

   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

   Tutkitaan kuvauksia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

   (a) Määritä kuvauksen $f \circ g$ arvo pisteessä -1.
   (b) Määritä kuvauksen $g \circ f$ arvo pisteessä -1.
   (c) Määritä kuvaus $f \circ g$.

6. Merkitään $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Tutkitaan matriisien määräämiä kuvauksia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\bar{v}) = A\bar{v}$ ja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(\bar{v}) = B\bar{v}$. Määritä kuvaus $f \circ g$. Minkä matriisin määräämä kuvaus yhdistetty kuvaus $f \circ g$ on? Miten tämän matriisin saa matriiseista A ja B?

7. Oleteaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w} \in V$. Osoita, että $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ on vapaa, jos ja vain jos $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$.

8. Oletetaan, että $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on vektoriavaruuden V kanta. Mitä operaatioita kannalle S voidaan tehdä niin, että tuloksena on edelleen avaruuden V kanta?