Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Avoin yliopisto
Kesä 2013
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 30.8.2013

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24, jossa käsitellään sisätuloa.

Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo asettamalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + (v_2 w_2)/4$. Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan tätä sisätuloa.

1. Tutkitaan vektoreita $\bar{a} = (2, 4)$, $\bar{b} = (-1, 2)$ ja $\bar{c} = (-2, 4)$ Mitkä niistä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun sisätulo määritellään edellä annetulla kaavalla?

2. Määritä ne vektorit $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, joilla $\|\bar{x}\| = 1$. Hahmottele sitten kuva tutkittavan sisätuloavaruuden yksikköympyrästä.

Tehtäväsarja II

Tarkastellaan vektoriavaruutta $C([0,1]) = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$.

3. Avaruudessa $C([0,1])$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Tutkitaan funktioita $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 1$ ja $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x$. Määritä sisätulo $\langle f, g \rangle$.

4. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä projektio $\mathrm{proj}_g f$.

5. Keksi kaksi nollasta poikkeavaa avaruuden $C([0,1])$ alkiota, jotka ovat ortogonaaliset. Voit halutessasi käyttää hyväksi edellistä tehtävää.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24.3, jossa käsitellään kohtisuoraa komplementtia.

6. Kuvaile, miltä näyttävät seuraavissa tapauksissa aliavaruus $W \subset \mathbb{R}^3$ ja sen kohtisuora komplementti $W^\perp$. Joukkoa $W^\perp$ ei tarvitse määrittää tarkasti.

   (a) $W = \mathrm{span}((2,0,0), (0,0,3))$ (b) $W = \{\bar{0}\}$

7. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \{(a, -a+b, a+2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Onko vektori $\bar{a} = (1,1,1)$ ortogonaalisessa komplementissa $W^\perp$? Entä vektori $\bar{b} = (3, 2, -1)$?

8. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä $W^\perp$ ja etsi sille jotkin virittäjät.

Tehtäväsarja IV

9. Merkitään $W = \text{span}((2,-2,1),(-1,1,4))$ ja $\bar{v} = (1,2,3)$. Määritä vektorin $\bar{v}$ kohtisuora projektio aliavaruudelle W. Mitä sinun tulee tarkistaa ennen projektion määrittämistä?
10. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kirjoita vektori $\bar{v}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen aliavaruuden $W^{\perp}$ alkio.

Tehtäväsarja V

Seuraavissa tehtävissä tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (1,-1,-1)$, $\bar{v}_2 = (0,3,3)$ ja $\bar{v}_3 = (3,2,4)$.

11. Vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ muodostavat kannan avaruudelle $\mathbb{R}^3$. Muokkaa kannasta ortonormaali kanta Gramin–Schmidtin menetelmää käyttäen.
12. Määritä vektorin $(4,10,-15)$ koordinaatit edellisessä tehtävässä määrittämäsi kannan suhteen. (*Neuvo:* Käytä hyväksesi sitä, että kanta on ortonormaali.)
13. Määritä vektorin $(2,-1,4)$ projektio aliavaruudelle $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Tarvitset tässä tehtävää 11!

Tehtäväsarja VI

14. Kuvaus L peilaa tason vektorit suoran $\text{span}((-1,2))$ suhteen ja venyttää niiden pituuden sen jälkeen kaksinkertaiseksi. Määritä kuvauksen ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet. Voit päätellä vastauksen vaikkapa kuvan avulla.
15. Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Osoita aliavaruuden määritelmän nojalla, että joukko $\{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{v} = 2\bar{v}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Tehtäväsarja VII

16. Oletetaan, että V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja U sen aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v} \in V$. Osoita, että $\bar{v} \in U$, jos ja vain jos $\text{proj}_U(\bar{v}) = \bar{v}$.

Tehtäväsarja VIII

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä.

17. Määritellään avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulo kaavalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 3v_1w_1 + v_2w_2$ ja tutkitaan aliavaruutta $U = \text{span}((-3,1))$.
    (a) Onko vektori $(1,3)$ ortogonaalisessa komplementissa $U^{\perp}$? Entä vektori $(-2,-18)$?
    (b) Määritä aliavaruus $U^{\perp}$.
    (c) Piirrä kuva aliavaruuksista U ja $U^{\perp}$.
18. Tutkitaan funktioita
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \\ g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{ja} \\ h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x. \end{aligned}$$
    Onko funktioavaruuden $\mathcal{F}$ jono (f,g,h) vapaa?