Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Avoin yliopisto
Kesä 2013
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 23.8.2013

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 21, jossa käsitellään isomorfismeja.

Tutkitaan alakolmiomatriiseista muodostuvaa vektoriavaruutta $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ sekä kuvausta $L\colon U \to \mathbb{R}^3\colon \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \to (a, b, c)$.

1. Osoita, että kuvaus L on lineaarinen.
2. Määritä kuvauksen L ydin ja kuva. Päättele niiden avulla, että L on isomorfismi.
3. Olet nyt osoittanut, että vektoriavaruudet U ja $\mathbb{R}^3$ ovat isomorfiset. Selitä omin sanoin, miten sen voi arvata katsomalla vektoriavaruuksien U ja $\mathbb{R}^3$ määritelmiä.

Tehtäväsarja II

4. Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$ on sellainen lineaarikuvaus, että $T(2, 1) = -2x - 1$ ja $T(0, -2) = 3x^2 + 1$. Määritä $T(4, 0)$.
5. Oletetaan, että $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Osoita, että projektiokuvaus
$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad P(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$$
on lineaarinen. (Pistetulon laskusäännöistä on apua.)
6. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus peilaa tason vektorit suoran $\mathrm{span}((1, 1))$ suhteen. (Neuvo: Miten kantavektorit kuvautuvat? Kurssimateriaalin luvusta 22 on apua.)
7. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on injektiivinen lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että avaruuden V jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on vapaa. Osoita, että myös jono $(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n))$ on vapaa.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 22.

Tarkastellaan lineaarikuvausta
$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_3 - x_4).$$

8. Määritä ydin $\operatorname{Ker} L$ ja etsi sille jotkin virittäjät.

9. Määritä kuva $\operatorname{Im} L$ ja etsi sille jotkin virittäjät.

10. Mikä on ytimen $\operatorname{Ker} L$ dimensio? Entä kuvan $\operatorname{Im} L$ dimensio?

Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 23, jossa käsitellään ominaisarvoja.

Merkitään $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Matriisi A määrää kuvauksen $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Määritä kuvauksen L_A ominaisarvot.

12. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä kuvauksen L_A ominaisarvoa 2 vastaava ominaisavaruus.

13. Määritä kuvauksen $L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a, b) = (2a + 5b, 2b)$ ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet.

14. Määritä seuraavissa tapauksissa lineaarikuvauksen $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.
    (a) Lineaarikuvaus T on venytys nelinkertaiseksi vaakasuunnassa ja venytys kaksinkertaiseksi pystysuunnassa.
    (b) Lineaarikuvaus T on projektio suoralle $\operatorname{span}((-2, 3))$.

15. Oletetaan, että neliömatriisi A on kääntyvä ja sillä on ominaisarvo λ. Osoita, että käänteismatriisilla A^{-1} on ominaisarvo λ^{-1}.

Tehtäväsarja V

16. Avaruudella $\mathbb{R}^3$ on kanta $\mathcal{B} = ((0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$. Määritä kannanvaihtomatriisin avulla vektorin $\bar{v} = (3, 1, 5)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

17. Osoita, että jono $\mathcal{B} = (-2x,\ x^2 + 4x,\ 3)$ on avaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta. (Lauseesta 18.12 on hyötyä.) Mikä on polynomin $x^2 + x + 1$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen?

Tehtäväsarja VI

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

18. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus ensin peilaa tason vektorit pystyakselin suhteen ja sitten kiertää niitä origon ympäri $180°$ vastapäivään.

19. Etsi isomorfismi avaruuden $\mathbb{R}^2$ ja tason $T = \{(5a + b,\ a - b,\ 3a + 4b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ välille.