Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Avoin yliopisto, HY
Kesä 2013
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 16.8.2013

Tehtäväsarja I

Merkitään

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Osoita, että jono (B_1, B_2, B_3, B_4) on vapaa.
2. Osoita, että $\mathcal{S} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta. Määritä matriisi, jonka koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen on $(-1, 4, 3, 5)$.
3. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja $\mathcal{S} = ((3,3),(2,1))$ ja $\mathcal{T} = ((1,2),(1,-1))$.
   (a) Määritä vektorin $\bar{b} = (5,4)$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{S}$ suhteen eli vektori $[\bar{b}]_{\mathcal{S}}$.
   (b) Määritä kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$ kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$.
   (c) Määritä koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{T}}$ kannanvaihtomatriisin $P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}$ avulla. Tarkista vielä lopuksi koordinaattien määritelmän perusteella, että laskut menivät oikein.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 19, joka käsittelee lineaarikuvauksia.

4. Onko kuvaus $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (|x_1|, |x_2|)$ lineaarinen?
5. Onko kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $L(x_1, x_2) = (x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ 2x_1)$ lineaarinen?
6. Onko kuvaus $D\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $D(A) = \det(A)$ lineaarinen?

Tehtäväsarja III

7. Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1,0) = (1,2)$ ja $L(0,1) = (-1,1)$. Määritä $L(3,-2)$.
8. Jatkoa edelliseen tehtävään. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Määritä $L(a,b)$.
9. Onko olemassa lineaarikuvausta $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $T(1,1) = (0,2,4)$, $T(3,-1) = (1,-3,0)$ ja $T(4,0) = (1,1,5)$?

10. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus on
$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2,\ 2x_1 + x_2,\ 3x_1 - 2x_2).$$

11. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, jos ja vain jos on olemassa sellainen reaaliluku a, että $f(x) = ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

    Neuvo: Muotoa jos ja vain jos olevat väitteet osoitetan kahdessa osassa. Osoita ensin, että väitteen ensimmäisestä osasta seuraa toinen. Osoita sitten, että toisesta seuraa ensimmäinen.

Tehtäväsarja IV

Tutustu lukuihin 19.1. ja 20, joissa käsitellään aliavaruuden kuvaa lineaarikuvauksessa sekä lineaarikuvauksen ydintä ja kuvaa.
Tarkastellaan lineaarikuvausta
$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -2x_1 - 2x_2)$$

12. Tutkitaan lähtöavaruuden aliavaruutta $W = \mathrm{span}((1, 2, 1), (1, 3, 0))$. Keksi kolme vektoria, jotka ovat aliavaruuden W kuvassa LW.
13. Määritä kuvauksen L ydin $\mathrm{Ker}(L)$.
14. Määritä kuva $\mathrm{Im}(L)$. Etsi sille jotkin virittäjät.
15. Onko kuvaus L injektio? Entä surjektio?

Tehtäväsarja V

16. Onko joukko $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x-y| = |y-z|\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?
17. Onko joukko $W = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a + b + c = 0\}$ polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus?

Tehtäväsarja VI

18. Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V \setminus \{\bar{0}\}$. Osoita, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos ne eivät ole yhdensuuntaisia.

Tehtäväsarja VII

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

19. Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$, $L(a, b) = ax^2 + (a + b)x + 3b$. Osoita, että L on lineaarikuvaus ja määritä sen ydin.
20. Tutkitaan funktioavaruuden $\mathcal{F}$ osajoukkoa $\mathcal{F}_d = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ on derivoituva}\}$. Osoita, että $\mathcal{F}_d$ on vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ aliavaruus. Näytä, että että derivointikuvaus $L_d\colon \mathcal{F}_d \to \mathcal{F}$, $f \mapsto \mathrm{D}(f)$ on lineaarikuvaus.