Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Avoin yliopisto
Kesä 2013
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: to 8.8.2013

Tehtäväsarja I

1. Tutkitaan vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{3\times 3}$, joka koostuu kaikista 3×3-matriiseista. Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori? Mikä on matriisin $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ vastavektori? Perustele vastauksesi vektoriavaruuden määritelmän avulla.
2. Piirrä kuva joukosta $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Osoita, että K varustettuna vektorien tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla ei ole vektoriavaruus.
3. Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin
$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c .$$
Laske $3 \oplus 4$ ja $-3 \odot 2$.
4. Jatkoa edelliseen tehtävään. Voidaan osoittaa, että $\mathbb{R}_+$ varustettuna yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$ on vektoriavaruus. Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori? Mikä on vektorin 6 vastavektori?
5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Osoita, että vektoriavaruuden ehdot 5 ja 7 pätevät joukossa $\mathbb{R}_+$, kun se varustetaan yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 16, joka käsittelee aliavaruuksia.

6. Oletetaan, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus ja $(1, 0, 3), (0, -2, -1) \in W$. Osoita, että myös vektorit $(0, -8, -4)$ ja $(-1, -2, -4)$ ovat aliavaruuden W alkioita.
7. Merkitään $W = \{(3x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Piirrä kuva joukosta W.
   (b) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $\bar{u} \in W$. Osoita, että $\bar{w} + \bar{u} \in W$.
   (c) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Osoita, että $r\bar{w} \in W$.
   (d) Osoita, että $\bar{0} \in W$.
   (e) Totea, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.
8. Piirrä kuva joukosta $U = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$. Onko U vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus?
9. Tarkastellaan 2×2 -matriisien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita aliavaruuden määritelmän perusteella, että joukko $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ -3b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 16.1, joka käsittelee virittämistä.

10. Kuuluuko polynomi $x^3 - 3$ polynomien $2x^3$, $x - 2$ ja x virittämään aliavaruuteen?

11. Onko vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ seuraavien vektoreiden virittämä?

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

12. Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Osoita, että $\bar{v} \in \operatorname{span}(3\bar{v} + \bar{w}, -2\bar{w})$.

Tehtäväsarja IV

13. Merkitään $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Anna esimerkki vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruudesta, johon A kuuluu ja B ei kuulu.

14. Jatkoa edelliseen tehtävään. Oletetaan, että U on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus ja A, $B \in U$. Päteekö tällöin välttämättä $3I \in U$? (Tässä I on ykkösmatriisi.)

Tehtäväsarja V

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydin- asioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

15. Onko vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ seuraavien vektoreiden virittämä?

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

16. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on aliavaruudet W ja U. Aliavaruuksien W ja U *summa* on joukko

$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}.$$

   (a) Jos $V = \mathbb{R}^3$, W on x-akseli ja U on y-akseli, miltä näyttää $W + U$?
   (b) Osoita, että jos W ja U ovat avaruuden V aliavaruuksia, myös summa $W + U$ on avaruuden V aliavaruus.