

Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Luennoilla tehtäviä laskuharjoituksia (2 sivua)
Syksy 2010

1. Oletetaan, että joillain $\sigma, \tau \in S_n$ pätee $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = T$, missä T on kolmen alkion joukko $\{x, \tau(x), \tau^2(x)\}$. Oletetaan lisäksi, että $\tau^3(x) = x$ ja että $T \cap \sigma(T) = \emptyset$. Osoita, että

$$[\sigma, \tau] = (x \ \tau^2(x) \ \tau(x)) \circ^\sigma (x \ \tau(x) \ \tau^2(x)).$$

2. a) Määritä eri palojen kiertymät Rubikin kuution perussiirroissa.
b) Määritä eri palojen kiertymät opituissa nurkka- ja särmäpalojen 3-sykleissä.
3. Osoita, että särmäpalojen kokonaiskiertymä ei muutu perussiirroissa.
4. Tarkastellaan $4 \times 4 \times 4$ -kuutiota. Kuvaile siirtosarja, jolla voidaan vaihtaa jonkin sivutahkon yläreunan molemmat särmäpalat alareunan särmäpalojen kanssa.

Toisin kuin tavallisessa kuutiossa, $4 \times 4 \times 4$ -kuutiossa on mahdollista vaihtaa kahden särmäpalan paikat keskenään. Osoita kuitenkin, että kahden särmäpalan paikkoja ei voi vaihtaa pelkästään sivutahkojen siirroilla. Voit lisäksi miettiä, miten tuo vaihto tehdään keskitahkojen avulla.

Neuvo. Jaa sivutahkon kierto osiin, jotka liikuttavat nurkka-, keski- ja särmäpaloja, ja tutki viimeksi mainitun osan etumerkkiä.

5. Olemme aikaisemmin osoittaneet, että Rubikin ryhmän keskus sisältyy asen-
toryhmään \mathbb{R}_a . Osoita, että keskus sisältää vain kaksi alkioita, joista toinen on
siirto, joka kääntää kaikki särmäpalat toiseen asentoon eikä liikuta mitään pa-
loja paikaltaan.

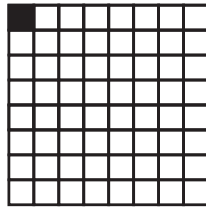
Neuvo: Keskukseen kuuluvat ne alkiot, jotka eivät muutu missään konjugoin-
neissa. Näytä, että jos jokin pala kääntyy keskukseen kuuluvassa siirroissa, saa-
daan sopivilla siirroilla konjugoimalla kaikki palat kääntymään samalla tavalla.

KÄÄNNÄ

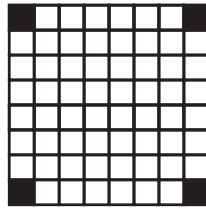
6. Tarkastellaan peliä, jota pelataan 8×8 -ruudukossa. Osa ruuduista on valkoisia, osa mustia. Perussiirroissa valitaan mikä tahansa ruudukon pysty- tai vaakariiveistä ja vaihdetaan kaikkien tuolla rivillä olevien ruutujen värit. Tarkoitus on saada kaikki ruudut valkoisiksi.

Osoita, että kuvan asemista A, B ja C lähtien peliä on mahdoton ratkaista.

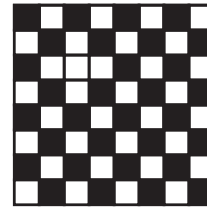
Neuvo. Etsi sopivia invariantteja. Esimerkiksi asemassa A kannattaa miettiä, miten nurkkaruutujen värit muuttuvat perussiirroissa.



A



B



C

7. Tutki, mikä on pienin siirtojen määrä, joka riittää edellisen tehtävän pelin ratkaisemiseen mistä tahansa asemasta, josta ratkaiseminen on mahdollista.

Vihje. Kannattaa tarkistaa ensin perussiirtojen kommutaattorit.