# 7 Rubikin kuution laajennoksia

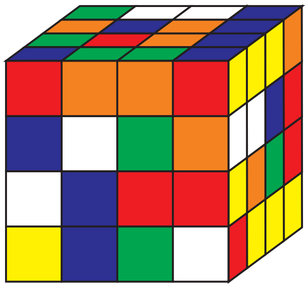
Tavallista Rubikin kuutiota voidaan laajentaa monilla tavoilla. Ensi näkemältä nämä uudet versiot vaikuttavat paljon hankalammilta ratkaista, mutta tarkempi tarkastelu osoittaa, että samat perusideat ovat edelleen voimassa monimutkaisemmissakin muunnelmissa.

## 7.1 Suuremmat kuutiot

Ensimmäiseksi mieleen tuleva tapa laajentaa kuutiota on lisätä särmän pituutta. Tällä tavalla saadaan muun muassa suositut $4 \times 4 \times 4$- ja $5 \times 5 \times 5$-kuutiot. Vaikka ruutujen määrä — ja samalla myös mahdollisten asemien määrä — kasvaa näissä laajennoksissa huimasti, kuution perusrakenne säilyy kuitenkin samana. Siksi tällä kurssilla osoitettuja tuloksia voidaan yleensä soveltaa sellaisinaan. Esimerkiksi nurkkapaloja on edelleen kahdeksan kappaletta, ja jokainen perussiirto on nurkkapalojen paikkojen suhteen pariton permutaatio. Kommutaattoreilla voidaan tuottaa paikkojen 3-syklejä sekä erilaisia asentoryhmän siirtoja, ja palojen kokonaiskiertymistä saadaan invariantteja samaan tapaan kuin yksinkertaisemmassakin kuutiossa.

Suuremmissa kuutioissa keskipalatkin saavat merkityksen. Jos särmän pituus on pariton, kuutiossa on joka tahkolla yksi keskimmäinen pala, jonka voi ajatella pysyvän aina paikallaan. Tästä keskimmäisestä palasta voi päätellä kunkin sivun värin missä tahansa asemassa. Jos särmän pituus on enemmän kuin kolme, on kuutiossa kuitenkin useampiakin keskipaloja, jotka koostuvat vain yhdestä ruudusta, ja näiden paikalleen saaminen vaatii omanlaisensa siirtosarjat. Siirtosarjoihin tarvitaan nyt myös keskitahkojen siirtoja, joita ei enää voida jättää huomiotta. Kommutaattorit kuitenkin tehoavat edelleen, ja tilannetta helpottaa se, että kukin keskipala voi olla vain yhdessä asennossa.

Kuutiossa, jonka särmän pituus on parillinen, ei sen sijaan ole sellaisia keskimmäisiä paikallaan pysyviä paloja, joista voisi aina tarkistaa kuution sivujen oikean värin. Tällaisessa tapauksessa voidaan kuitenkin turvautua nurkkapaloihin. Nurkkapalojen rakenteesta johtuen kuutiossa vastakkaisten sivutahkojen värit on aina määrätty. Jos perusasemassa valkoinen sivu on keltaista vastassa, ei kuutiossa voi olla nurkkapalaa, jossa olisi sekä valkoinen että keltainen ruutu. Täten valkoinen ja keltainen sivu eivät voi ikinä olla vierekkäin. Kuution sivujen määräämiseksi riittää siis valita yksi nurkkapala, esimerkiksi sini-kelta-punainen, ja ajatella tuon nurkkapalan olevan aina oikealla paikallaan. Näin selviää, missä sininen, keltainen ja punainen sivu sijaitsevat kussakin asemassa, ja muut sivut ovat näille vastakkaisia. Kuvassa 30 on $4 \times 4 \times 4$-kuutio, jonka nurkkapalasta näkyy, että kuution punainen sivu on katsojaan päin ja sininen sivu ylöspäin. Takasivu on tällöin oranssi, vasen sivu valkoinen ja alasivu virheä.



Kuva 30: $4 \times 4 \times 4$-kuutio, “Rubikin kosto”

Parillissärmäisillä kuutioilla on toinenkin erikoispiirre. Keskitahkojen siirrot voidaan nimittäin jakaa reuna- ja keskipaloja liikuttaviin osiin, joista edellinen on pariton permutaatio ja jälkimmäinen parillinen. Parillinen keskipalojen siirto voidaan tuottaa 3-syklien avulla, joten myös reunapalojen pariton permutaatio on mahdollinen siirto. Tällaisilla kuutioilla voidaankin tehdä esimerkiksi kahden reunapalan vaihto, joka ei onnistu paritonsärmäisillä kuutioilla.

Särmän pituuden lisääntyessä käytännön ongelmaksi tulee ratkaisualgoritmin pituus. Kuutiossa, jonka särmän pituus on kuusi, on jo 96 keskipalaa. Näiden kaikkien paikoilleen saaminen 3-syklien avulla on melkoisen työlästä.

## 7.2 Muita ruutujen määrään perustuvia laajennoksia

Kuution ruutujen määrää voi lisätä myös tekemällä kuutiosta neli- tai useampiulotteisen. Tällaisten kuutioiden käsitteleminen onnistuu yleensä vain tietokoneen avulla. Ulottuvuuksien lisääntyessä eri pala- ja siirtotyyppejä tulee huimasti lisää, mutta ratkaisun perusideat eivät kuitenkaan muutu.

Toinen peruskuution muunnelma ovat käyttää kuution sijasta erimuotoisia kappaleita. Rubikin kuution tapaisia pelejä voidaan tehdä sekä säännöllisistä että epäsäännöllisistä monitahokkaista, ja näiden avulla saadaan aikaan monenlaisia algebrallisia struktuureja. Kuitenkin niin kauan kuin on mahdollista tuottaa 3-syklejä, voidaan ratkaisua aina lähestyä niiden avulla. Siirtojen parillisuuskysymykset voivat erimuotoisissa kuutioissa sen sijaan olla hyvinkin erilaisia. Esimerkiksi dodekaedrin muotoisessa Megaminx-pelissä jokainen perussiirto on parillinen permutaatio sekä nurkka- että särmäpalojen asentoryhmässä. (Tässä mielessä Megaminx on siis jopa yksinkertaisempi kuin tavallinen kuutio.)

## 7.3 Superkuutio

Edellä mainituissa Rubikin kuution muunnelmissa on sama tavoite kuin perinteisessä kuutiossa: saada erivärisen ruudut samoille paikoille kuin perusasemassa. Kyse on siis ruutujen paikkojen permutaatioista. Jos ruutuja on $n$ kappaletta, kuution siirtoja vastaavan permutaatioryhmän voi ajatella symmetrisen ryhmän $S_n$ aliryhmäksi, olipa kyse sitten tavallisesta kolmiulotteisesta kuutiosta tai vaikkapa seitsenulotteisesta ikosaedrista.

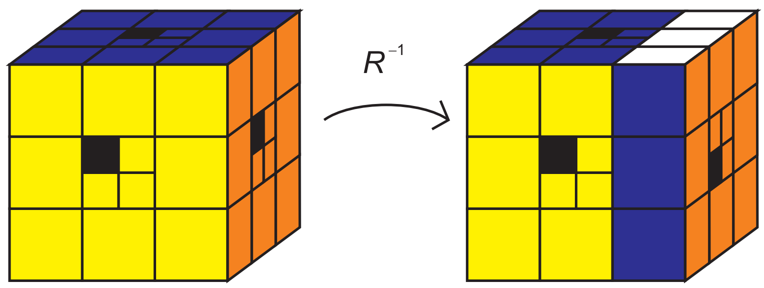
Yksi mahdollisuus perustavoitteen muunnelmaksi on tarkastella keskipalojen asentoja. Nurkka- ja reunapalojen asennot määräytyvät, kun niiden ruudut asettaa oikealle paikalleen. Keskipaloissa on kuitenkin vain yksi ruutu, ja keskipalaa onkin mahdollista kiertää itsensä ympäri ilman, että mikään ruutu joutuu väärälle paikalle. Jos tavoitteeksi otetaan myös keskipalojen asentojen palauttaminen samaksi kuin alussa, saadaan ns. *superkuutio-ongelma.*

Tarkastellaan lähemmin $3 \times 3 \times 3$-kuution superkuutio-ongelmaa. Koska kyse ei enää ole pelkästään ruutujen paikoista, ei voida ajatella eri asemien muodostavan aliryhmää kaikkien ruutujen permutaatioiden ryhmässä $S_{54}$, kuten aiemmin tehtiin. Algebralliseen perusstruktuuriin tarvitaan siis jonkinlainen laajennos, toisin kuin ruutujen määrään perustuvissa Rubikin kuution muunnelmissa.

Yksi vaihtoehto perusstruktuurin laajentamiseksi on seuraava: Koska keskipalojen voidaan edelleen ajatella pysyvän kaikissa siirroissa paikoillaan ja keskipaloja koskevat siirrot ovat riippumattomia muita paloja koskevista siirroista, voidaan haluttu laajennos toteuttaa tuloryhmänä. Kukin keskipala voi olla neljässä eri asennossa, ja nämä asennot voidaan ajatella numeroiduiksi syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_4$ alkioilla. Tällä tavalla saadaan laajennetuksi ryhmäksi seitsemän ryhmän suora tulo $S_{48} \times \mathbb{Z}_4^6$, jossa on ensimmäisenä tekijänä nurkka- ja reunaruutujen permutaatioryhmä ja seuraavina kaikkien kuuden keskipalan asentoryhmät.

Toinen mahdollisuus on lisätä kuutioon keinotekoisia ruutuja. Jos ajatellaan myös jokainen keskipala jaetuksi neljään ruutuun, jotka sijaitsevat kaikki samalla sivulla, voidaan näiden valeruutujen paikoista päätellä keskipalan asento. Tällainen jako on esitetty kuvassa 31, josta näkyy samalla, miten perussiirto vaikuttaa keskipalan asentoon. Yksi keskipalan ruuduista on väritetty mustaksi selvyyden vuoksi. Jakamalla keskipala ruutuihin voidaan jälleen ajatella eri asemien muodostavan aliryhmän kaikkien ruutujen permutaatioiden ryhmässä, mutta nyt ruutuja on yhteensä 64, joten kyse on ryhmän $S_{64}$ aliryhmästä. Tämä ryhmä on kooltaan paljon suurempi kuin ensimmäisen laajennosvaihtoehdon tuloryhmä, mutta koska kyse on nyt vain ruutujen lisäämisestä, voidaan aikaisempia ideoita jälleen käyttää hyväksi.

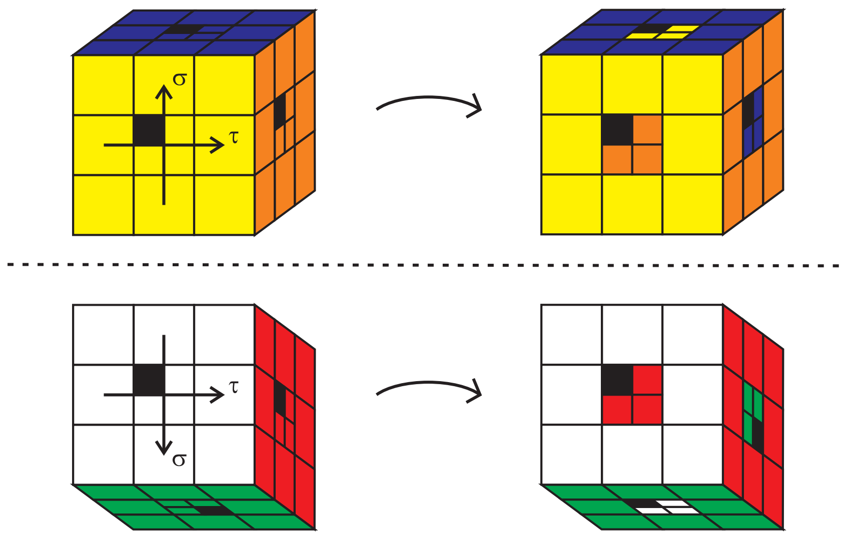
Tutkitaan nyt, minkälaisia kommutaattoreita keskipalan liikkeistä saadaan.




Kuva 31: Keskipalojen jako ruutuihin ja perussiirron vaikutus keskipalan asentoon

Tätä varten luovutaan nyt niistä periaatteista, että keskipalat pysyisivät aina paikallaan ja keskitahkon kierto tulkittaisiin rinnakkaisten sivutahkojen kierroksi. Perussiirrot (keskitahkojen siirrot mukaanlukien) nimetään kuitenkin edelleen totuttuun tapaan.

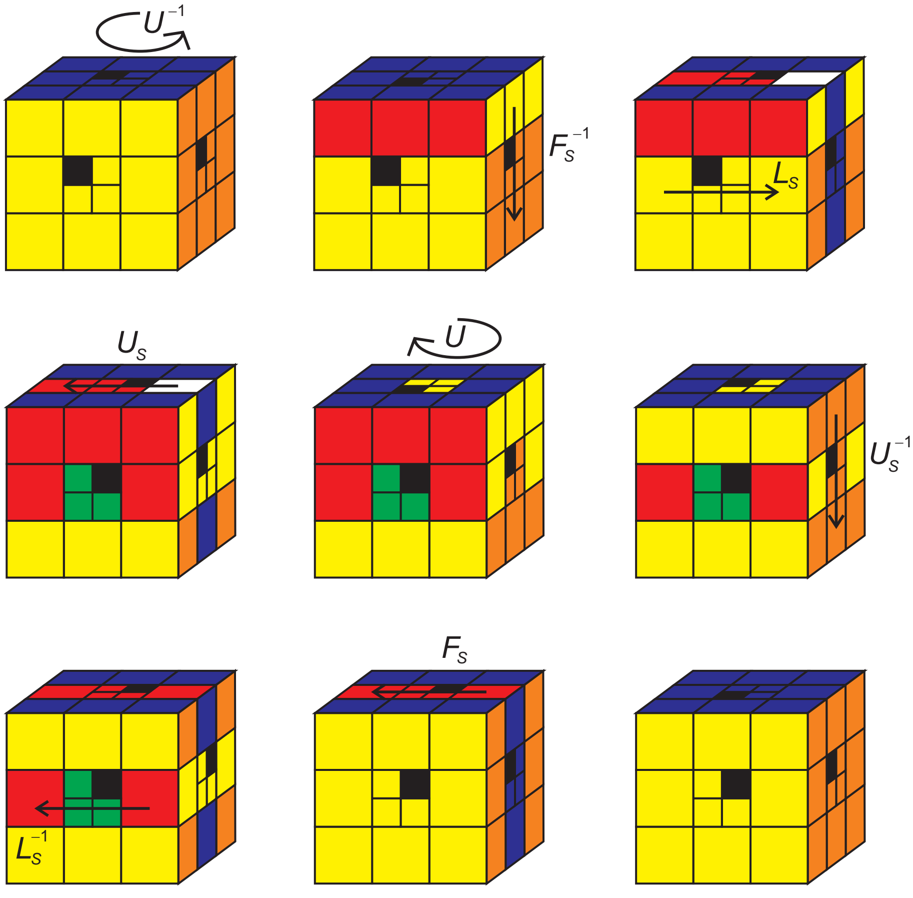
Ensinnäkin on huomattava, että jokainen siirto, joka siirtää jonkin keskipalan paikaltaan, siirtää samalla myös vastakkaista keskipalaa. Näin ollen keskipalojen paikkaryhmässä on mahdotonta löytää kahta permutaatiota, joiden yhteiseen kantajaan kuuluisi vain yksi keskipala. Kommutaattoriperiaatteella (lause 6.3) ei siis saada aikaan paikkojen 3-sykliä. Paikkaryhmässä pienin yhteinen kantaja, eli kahden vastakkaisen keskipalan pari, saadaan esimerkiksi valitsemalla siirroiksi kahden eri keskitahkon perussiirrot. Tämä on tähän mennessä esillä olleista kommutaattorisiirroista yksinkertaisin, ja se tuottaa vastakkaisten keskipalojen 3-syklit kuvan 32 mukaisesti.




Kuva 32: Vastakkaisten keskipalojen 3-syklit

Kuvassa kuutio on kuvattuna sekä edestä että takaa. Siirrot on helppo suorittaa, ja tulos on näyttävä, mutta siirtosarja ei itse asiassa auta keskipalojen oikean asennon löytämisessä.

Toinen mahdollisuus kommutaattorin tuottamiseen on valita sellaiset siirrot, joista toinen kiertää keskipalaa paikallaan ja toinen siirtää sen johonkin muuhun paikkaan. Kiertäväksi permutaatioksi $\tau$ voidaan valita esimerkiksi perussiirto $U$. Siirtävä permutaatio $\sigma$ saadaan puolestaan helposti kolmen keskitahkon siirron yhdistelmänä $F_S L_S^{-1} U_S^{-1}$ (oikeastaan konjugaattisiirto). Näistä muodostetun kommutaattorin $[\sigma, \tau]$ tuloksena sininen keskipala kiertyy vastapäivään ja keltainen keskipala myötäpäivään. Siirtosarja on esitetty kuvassa 33. Huomaa, että keskipalojen liikuttaminen vaikuttaa siirtojen merkitsemistapaan, ja siksi esimerkiksi siirto $L_S$ kiertää kuvassa kuution yläpinnan suuntaista keskitahkoa.




Kuva 33: Keskipalojen kierto

Keskipalojen kiertymät $k_x(\sigma)$ voidaan määritellä samaan tapaan kuin luvussa 6.5. Tällöin kukin kiertymä on ajateltava syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_4$ alkioksi. Koska yhden sivutahkon kierto muuttaa vain yhden keskipalan kiertymää yhdellä, keskipalojen kokonaiskiertymä $K_K(\sigma)$ voi olla mikä tahansa luvuista 0, 1, 2 tai 3. Edellä kuvattu siirtosarja ei vaikuta kokonaiskiertymään, joten tarvitaan muitakin siirtoja keskipalojen asentojen ratkaisemiseksi.

Nimitetään tässä yhteydessä *perusasemaksi* sitä asemaa, jossa kaikki palat ovat oikeilla paikoillaan ja oikeissa asennoissa, mukaanlukien keskipalat. Sellaisia asemia, joissa kaikki palat ovat oikeilla paikoillaan ja nurkka- ja reunapalat lisäksi oikeissa asennoissaan, kutsutaan *vanhaksi perusasemaksi.* Vanhasta perusasemasta toiseen siirtyminen vaatii parillisen määrän perussiirtoja, sillä nämä ovat ruutujen parittomia permutaatioita, jollei keskipalojen asentoa oteta lukuun. (Keskitahkon perussiirto voidaan laskea omaksi perussiirrokseen tai kahdeksi sivutahkon perussiirroksi.) Koska perusasemassa keskipalojen kokonaiskiertymä on 0, täytyy jokaisessa vanhassa perusasemassa kokonaiskiertymän olla joko 0 tai 2.

Edellisen päättelyn nojalla keskipalat saadaan oikeaan asentoon seuraavasti: Ratkaistaan kuutio vanhan mallin mukaan, jolloin päädytään johonkin vanhaan perusasemaan. Keskipalat voivat olla nyt väärissä asennoissa, mutta niiden kokonaiskiertymä on 0 tai 2. Jos se on 0, keskipalat saadaan oikeisiin asentoihin yllä kuvattua siirtosarjaa soveltamalla. Jos kokonaiskiertymä on 2, tehdään ensin kaksi perussiirtoa esimerkiksi kiertämällä yhtä sivutahkoa puoli kierrosta. Tällöin kokonaiskiertymäksi tulee 0. Paikoiltaan siirtyneet nurkka- ja särmäpalat voidaan nyt palauttaa perusasemaan soveltamalla aiemmin opittuja algoritmeja. Kyseisten siirtosarjojen kantajat eivät sisällä keskipaloja, joten näiden kiertymät eivät tässä kohtaa muutu. (Tämä on helpointa nähdä ajattelemalla keskitahkojen perussiirtoja sivutahkojen pyörityksinä, jolloin keskipalat eivät liiku paikoiltaan. Keskipalojen asentoryhmä puolestaan on vaihdannainen, joten jokainen kommutaattori on tuohon asentoryhmään rajoitettuna triviaali.) Tuloksena saadaan vanha perusasema, jossa keskipalojen kokonaiskiertymä on 0, ja tähän voidaan jälleen soveltaa keskipaloja kiertävää siirtosarjaa.

LOPPU