6 Kommutaattorit

Alkioiden kommutaattori on niiden vaihdannaisuuden mitta. Toisaalta kommutaattoreita voidaan käyttää hyväksi etsittäessä ryhmästä tietynlaisia alkioita.

6.1 Kommutaattorien perusominaisuudet

Jos alkiot g ja h eivät ole keskenään vaihdannaisia, eli ne eivät *kommutoi* keskenään, tulot gh ja hg eroavat toisistaan jollain tavoin. Tällöin löytyy jokin alkio r, jolle pätee $gh = r \cdot hg$. Tämä luku r ilmaisee ikään kuin eri päin laskettujen tulojen välisen suhteen.

Määritelmä 6.1. Olkoot g ja h ryhmän G alkioita. Yhdistelmää

$$[g, h] = (gh)(hg)^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} \in G$$

kutsutaan alkioiden g ja h *kommutaattoriksi.*

Alkiot g ja h kommutoivat, jos ja vain jos niiden kommutaattori on neutraalialkio. Kommutaattorilla ja konjugaatilla on selvä yhteys, joka ilmenee esimerkiksi kaavoissa

$$[g, h] = {}^{g}h \cdot h^{-1} \quad \text{ja} \quad [g, h] = g \cdot {}^{h}\!\left(g^{-1}\right).$$

Lisäksi seuraavat kaavat ovat kommutaattoreita käsiteltäessä hyödyllisiä:

$$[g, h] \cdot g = g \cdot [h, g^{-1}] \quad \text{ja} \quad [g, h] \cdot h = h \cdot [h^{-1}, g].$$

On myös muistettava, että alkioiden kommutaattori ei ole symmetrinen, vaan $[g, h] = [h, g]^{-1}$.

Esimerkki 6.2. Lasketaan permutaatioiden $\sigma = (123)(45)$ ja $\tau = (2345)$ kommutaattori ryhmässä S_5:

$$[\sigma, \tau] = {}^{\sigma}\tau \cdot \tau^{-1} = {}^{(123)(45)}(2345) \circ (2345)^{-1} = (3154) \circ (5432) = (15324).$$

Kommutaattorista tuli 5-sykli, johon osallistuvat kaikki perusjoukon luvut. Voidaan ajatella, että tämä 5-sykli on “verraten suuri” alkio ryhmässä S_5, mikä tarkoittaa sitä, että permutaatiot σ ja τ kommutoivat hyvin heikosti keskenään.

Paitsi että kommutaattoreita voi käyttää mittaamaan alkioiden välistä kommutointia, niitä voi käyttää myös *tuottamaan* erityisen suuria tai pieniä alkioita. Jos nimittäin löydetään alkiot, jotka näyttävät olevan lähes vaihdannaisia keskenään, niiden kommutaattoriksi saadaan mitä luultavimmin hyvin pieni alkio. Alkion “suuruus” tai “pienuus” ei sinänsä ole yleensä ryhmässä selvästi määriteltyä, mutta jos ryhmä koostuu johonkin joukkoon vaikuttavista alkioista, kuten permutaatioista, pieni alkio on sellainen, joka vaikuttaa joukkoon mahdollisimman vähän.

Esimerkiksi kaksi permutaatiota kommutoivat keskenään varmasti, jos ne vaikuttavat kokonaan eri alkioihin. Mitä vähemmän on yhteisiä alkioita, joihin kummatkin vaikuttavat, sitä enemmän permutaatiot kommutoivat ja sitä pienempi on niiden kommutaattori. Kuitenkin jokainen kommutaattori on välttämättä parillinen permutaatio, ja pienin parillinen permutaatio on 3-sykli. Seuraavan lauseen idea näkyy myös kuvassa 22.

Lause 6.3. *Olkoot σ ja τ jonkin joukon X permutaatioita. Jos kantajien leikkaukselle pätee* $\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \{x\}$ *jollain $x \in X$, niin*

$$[\sigma, \tau] = \Big(x \ \sigma(x) \ \tau(x)\Big).$$

Todistus. Näytetään ensin, että ehdosta $\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \{x\}$ seuraa aina $[\sigma, \tau](x) = \sigma(x)$. Huomataan aluksi, että $\sigma(x) \neq x$ ja $\tau(x) \neq x$. Lisäksi $\tau(x)$ kuuluu τ:n kantajaan, koska permutaation kantaja sisältää aina täsmälleen samat alkiot kuin sen käänteiskuvauksen kantaja. Toisaalta $\tau(x) \notin \operatorname{supp}(\sigma)$, koska $\tau(x) \neq x$. Nyt saadaan

$$[\sigma, \tau](x) = \sigma\tau\sigma^{-1} \underbrace{\tau^{-1}(x)}_{\notin \operatorname{supp}(\sigma)} = \sigma\tau\tau^{-1}(x) = \sigma(x).$$

Saadun tuloksen sekä aiemmin mainittujen kaavojen perusteella pätee myös

$$[\sigma, \tau](\sigma(x)) = \Big(\sigma \circ [\tau, \sigma^{-1}]\Big)(x) = \sigma(\tau(x)) = \tau(x)$$

ja

$$[\sigma, \tau](\tau(x)) = \Big(\tau \circ [\tau^{-1}, \sigma]\Big)(x) = \tau(\tau^{-1}(x)) = x.$$

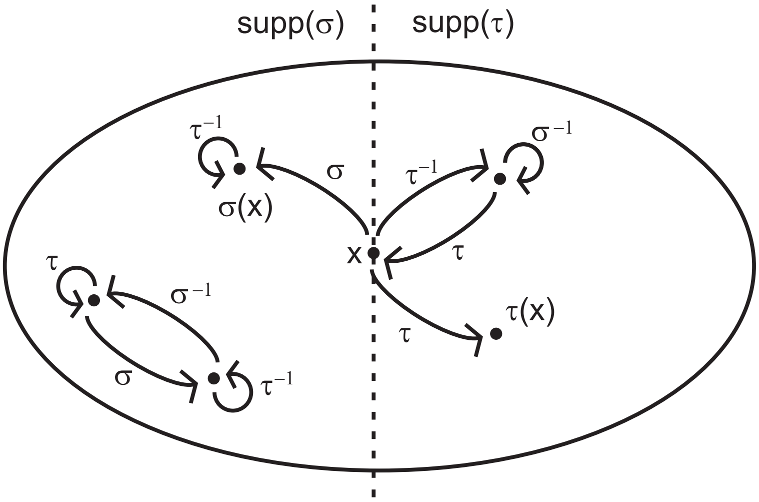
Yllä nähtiin, että permutaatio $[\sigma, \tau]$ sisältää ainakin 3-syklin $(x \ \sigma(x) \ \tau(x))$. Jäljelle jää tarkistaa, mitä tapahtuu, jos $y \notin \{x, \sigma(x), \tau(x)\}$. Tällöin voidaan tarkastella kolmea vaihtoehtoa. Jos y ei ole σ:n eikä τ:n kantajassa, niin selvästikin $[\sigma, \tau](y) = y$. Jos taas $y \in \operatorname{supp}(\sigma)$, niin y ei voi olla samalla τ:n kantajassa (koska $y \neq x$), joten

$$[\sigma, \tau](y) = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}(y) = \sigma\tau \underbrace{\sigma^{-1}(y)}_{\neq x} = \sigma\sigma^{-1}(y) = y.$$

Edelleen, jos $y \in \operatorname{supp}(\tau)$, niin

$$[\sigma, \tau](y) = \sigma\tau\sigma^{-1} \underbrace{\tau^{-1}(y)}_{\neq x} = \sigma\tau\tau^{-1}(y) = \sigma(y) = y.$$

Nähtiin, että aiemmin löydetyn 3-syklin ulkopuoliset alkiot pysyvät paikallaan, joten kommutaattori on juuri tuo mainittu 3-sykli. □



Kuva 22: Miten kommutaattorista tulee 3-sykli

6.2 Kommutaattorit Rubikin ryhmässä

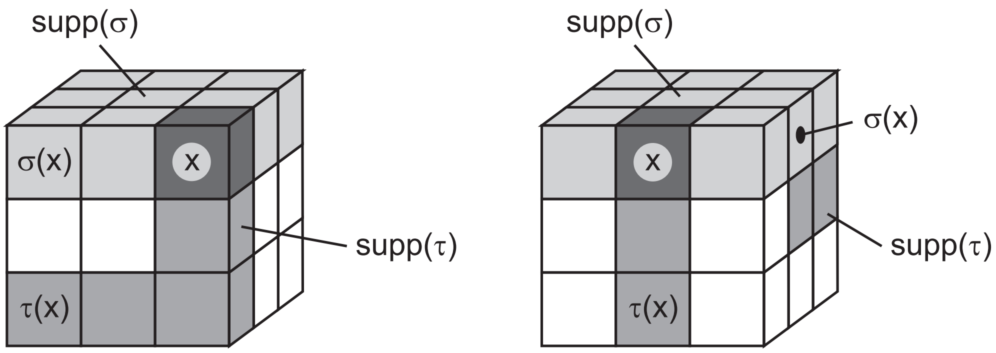
Rubikin kuution ratkaisemisessa keskeinen ongelma on, että perussiirrot liikuttavat niin suurta osaa kuution ruuduista. Kun yksi perussiirto liikuttaa 20 ruutua 48:sta, on hyvin vaikea seurata, mihin kukin ruutu ajautuu. Kommutaattoreita voi tässä yhteydessä käyttää tehokkaasti hyödyksi, sillä niiden avulla saadaan aikaan siirtoja, jotka liikuttavat paljon pienempää osaa kuutiosta kerrallaan. Itse asiassa aiemmin opitut siirtosarjat voidaan tuottaa juuri tällä periaatteella, ja seuraavaksi tutkitaan tarkemmin, miten tämä käytännössä tapahtuu.

Tarkastellaan ensin tilannetta Rubikin paikkaryhmässä. Lauseen 6.3 mukaan voidaan tuottaa kolmen palan sykli, jos vain löydetään kaksi siirtoa, joiden yhteisen vaikutuksen piiriin kuuluu ainoastaan yksi pala. Yritetään saada tämä aikaan nurkkapaloilla niin, että tuloksena olisi luvussa 3.3 opittu nurkkapalojen 3-sykli.

Koska lauseen 6.3 mukaan siirtojen σ ja τ kommutaattorina on mahdollista saada 3-sykli $(x\ \sigma(x)\ \tau(x))$, on järjestettävä niin, että σ siirtää etutahkon oikeassa yläkulmassa olevan palan vasempaan yläkulmaan, ja τ siirtää saman palan vasempaan alakulmaan (ks. kuva 23). Siirroksi σ voidaan valita vaikkapa ylätahkon pyöritys U. Tämän jälkeen siirron τ on kuitenkin oltava sellainen, että se ei liikuta muita ylätahkon paloja kuin palaa x. Tämä saadaan aikaan *konjugoimalla* alatahkon pyöritys D^{-1}, joka ei liikuta ylätahkoa, sellaisella siirrolla, joka siirtää oikeassa alakulmassa olevan palan x:n paikalle. Näin saadaan siirroksi τ lopulta konjugaatti ${}^{R}D^{-1} = RD^{-1}R^{-1}$.

Särmäpalojen kohdalla tilanne on samanlainen. Opitussa siirtosarjassa siirtoa σ vastaa ylätahkon kierto U^{-1}. Siirron τ pitäisi nyt siirtää pala x alarivin keskipalan paikalle (ks. kuva 23) ilman että ylätahkon palan liikkuvat. Tämä onnistuu konjugoimalla etutahkon kierrolla pystysuoran keskirivin paikalle vaakasuora. Tällöin haluttu siirto muuttuu vaakasuoran keskitahkon siirroksi, joka puolestaan ei koske ylätahkoon.

Tilanne on nyt kuitenkin hieman mutkikkaampi kuin nurkkapalojen tapauksessa, sillä keskitahkon siirtämisen on alun perin tulkittu tarkoittavan rinnakkaisten sivutahkojen liikettä. Vaakasuoran keskitahkon kiertäminen siis liikuttaa oikeastaan myös ylätahkon paloja, mikä ei ollut tarkoitus. Tässä yhteydessä onkin parempi sallia hetkeksi keskitahkojen pyöritykset omiksi siirroikseen, jotka pitävät sivutahkojen palat paikallaan, jotta päästään käyttämään lausetta 6.3. Sen nojalla tässäkin tapauksessa saadaan 3-sykli, vaikka tilannetta tulkittiinkin totutusta poikkeavalla tavalla. Lopuksi voidaan sitten nimetä käytetyt siirrot oikeaoppisesti, jolloin siirrosta τ tulee tavallisen konjugaatin sijaan yhdistelmä $\tau = F^{-1}U_S^{-1}L$.



Kuva 23: Paikkaryhmän 3-syklien muodostaminen

Asentoryhmässä 3-syklejä tuottavan lauseen käyttäminen ei kuitenkaan onnistu. Koska yhden ruudun liikkuessa liikkuvat samalla kaikki saman palan ruudut, ei kahden permutaation kantajien leikkaus voi olla yksiö. Merkitään tässä yhteydessä sitä palaa, johon ruutu x kuuluu, symbolilla P_x, ja tuon palan kaikkien ruutujen joukkoa symbolilla R_x. Jos siis kaksi siirtoa vaikuttavat molemmat ruutuun x, niiden yhteinen vaikutusalue voi olla pienimmillään joukko R_x. Niinpä tällaisten siirtojen kommutaattori on pienin löydettävissä oleva kommutaattori.

Tarkastellaan seuraavaksi, minkälaiset kaksi siirtoa voitaisiin valita, jotta saataisiin kantajien leikkaukseksi joukko R_x ja lisäksi siirtojen kommutaattorista tulisi asentoryhmän siirto. Jos kumpikaan siirto ei liikuta palaa P_x paikaltaan, ne ovat molemmat tuon palan ruutuihin rajoitettuina syklejä. Tällaiset siirrot kommutoivat keskenään palan P_x kohdalla, joten niiden kommutaattori ei liikuta lainkaan kyseisen palan ruutuja. Jos taas molemmat siirrot liikuttavat palaa P_x, tilanne palautuu takaisin paikkaryhmään. Tuloksena on tällöin palojen 3-sykli, joka ei kuulu asentoryhmään.

Ainoa jäljellä oleva vaihtoehto on, että toinen siirroista liikuttaa palaa P_x ja toinen ainoastaan vaihtaa sen ruutujen järjestystä. Tällaisessa tilanteessa syntyvä kommutaattori kuuluu asentoryhmään, mikä voidaan nähdä esimerkiksi siitä, että asentoryhmä on normaali aliryhmä. Kommutaattori $[\sigma, \tau]$ voidaan nimittäin kirjoittaa muodossa ${}^{\sigma}\tau \cdot \tau^{-1}$, joten jos τ on asentoryhmän siirto, niin koko kommutaattori kuuluu asentoryhmään.

6.3 Algoritmi 3: nurkkapalojen kierto

Nurkkapalojen kierron tuottavan siirtosarjan muodostaminen perustuu luvun 6.2 päätelmiin. Siirtosarja on kahden siirron kommutaattori, joista toinen kiertää nurkkapalaa ja toinen siirtää sitä paikaltaan. Siirtävä permutaatio σ on tässäkin algoritmissa ylätahkon kierto U. Kiertävä permutaatio puolestaan on yhdistelmä $\tau = RD^{-1}R^{-1}F^{-1}D^{-1}F$. Näistä muodostuu kommutaattori

$$[\sigma, \tau] = URD^{-1}R^{-1}F^{-1}D^{-1}FU^{-1}F^{-1}DFRDR^{-1}.$$

Tämä siirtosarja, joka on esitetty kuvassa 24, kiertää kahta vierekkäistä nurkkapalaa A ja B vastakkaisiin suuntiin. Pala A kiertyy vastapäivään ja pala B myötäpäivään.

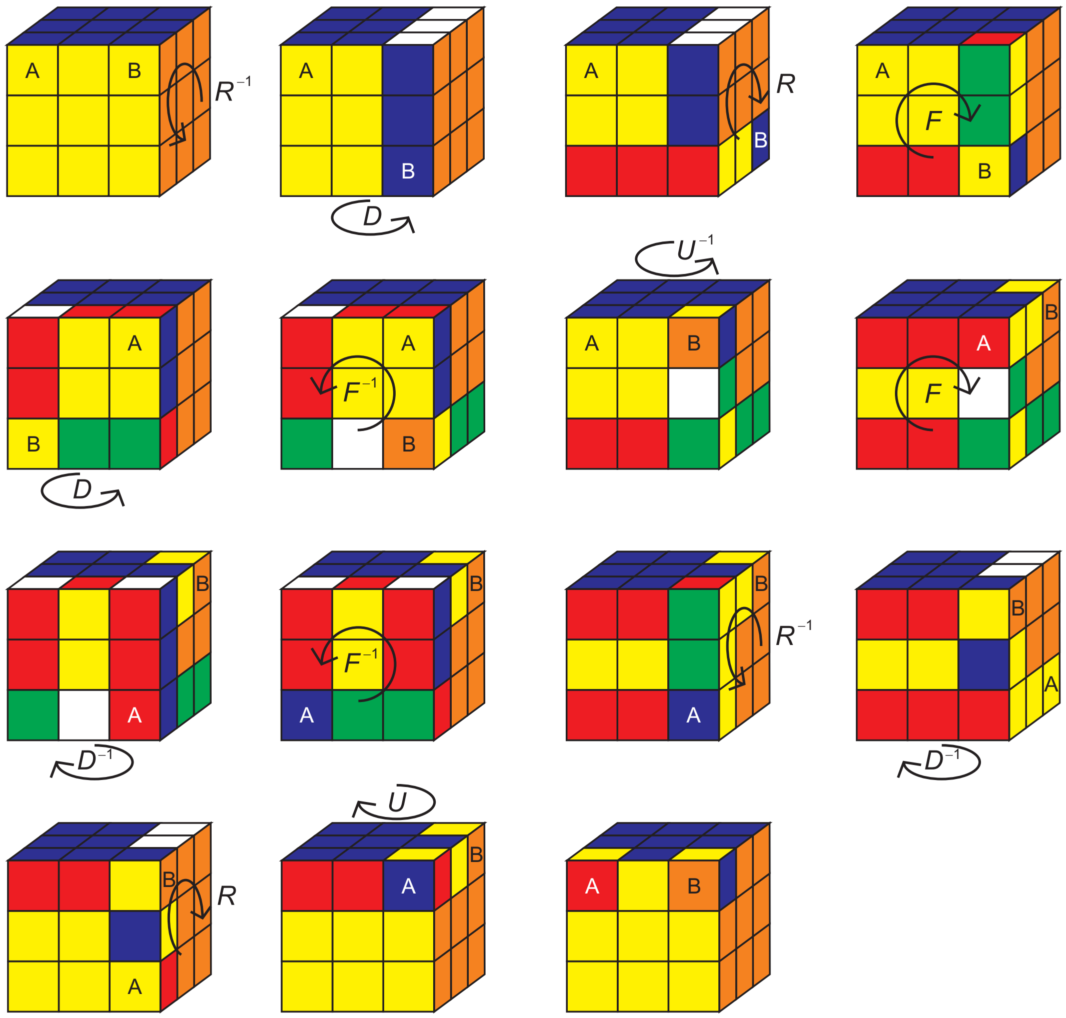
Siirtosarjan voi hahmottaa esimerkiksi seuraavasti: Aluksi tehdään joukko siirtoja, joissa pala B kiertyy myötäpäivään, ja samalla kuution kaksi alinta tahkoa saavat sekoittua miten hyvänsä. Sen jälkeen siirretään pala A palan B paikalle alempiin tahkoihin koskematta ja suoritetaan aiemmat siirrot uudestaan päinvastaisessa järjestyksessä. Nämä siirrot kiertävät nyt palaa A vastapäivään ja asettavat samalla kuution alaosan uudelleen järjestykseen. Lopuksi käännetään palat A ja B alkuperäisille paikoilleen.

Siirto τ, joka kiertää oikeassa ylänurkassa olevaa palaa, on puolestaan helpointa hahmottaa kahdessa osassa. Molemmat osat ovat samanlaisia konjugaattimuotoisia siirtoja; toinen koskee kuution oikeanpuoleista sivutahkoa, toinen etutahkoa.

6.4 Algoritmi 4: särmäpalojen kierto

Särmäpalojen kierto on samantapainen kommutaattori kuin nurkkapalojen kierto. Särmäpalaa siirtävä permutaatio σ on edelleen ylätahkon kierto U. Särmäpalan kääntävä permutaatio saadaan yhdistelmästä $\tau = RU_SB^{-2}U_S^{-2}F$. Koko siirtosarja on kommutaattori

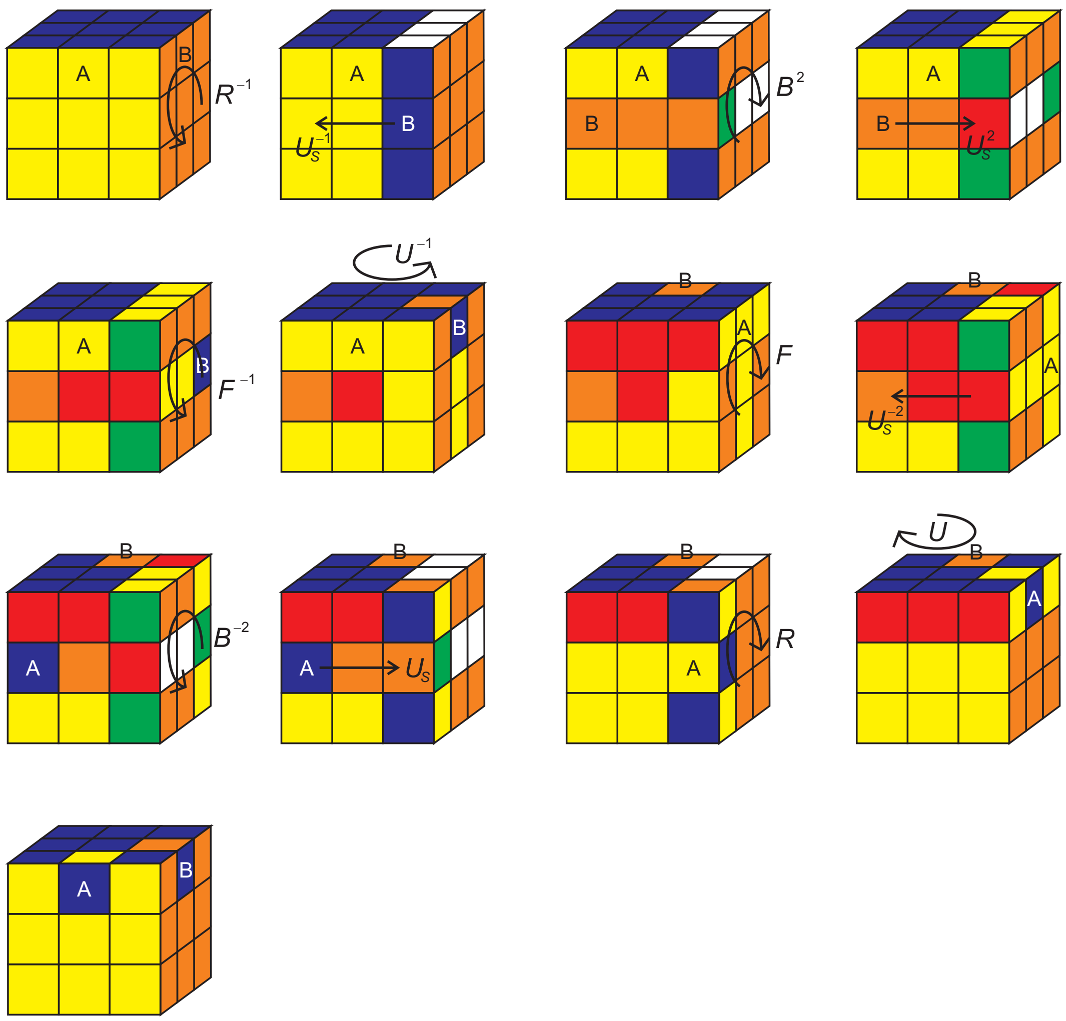
$$[\sigma, \tau] = URU_SB^{-2}U_S^{-2}FU^{-1}F^{-1}U_S^2B^2U_S^{-1}R^{-1}.$$



Kuva 24: Nurkkapalojen kierto

Tämä siirtosarja on esitetty kuvassa 25. Se kääntää ympäri kaksi vierekkäisillä reunoilla sijaitsevaa särmäpalaa (palat A ja B).

Siirtosarja perustuu siihen, että palan B ruudut ovat ainoat ruudut, joihin sekä σ että τ vaikuttavat. Näiden siirtojen kommutaattorista tulee siksi pieni ja helposti hallittava. Tarkalleen ottaen siirrot tosin vaikuttavat useampiinkin yhteisiin ruutuihin, koska keskitahkon kääntämisen ajatellaan liikuttavan myös ylätahkoa. Tässä kuitenkin luovutaan hetkeksi siitä ajattelutavasta, niin kuin tehtiin myös luvussa 6.2 särmäpalojen 3-sykliä tarkasteltaessa. Algoritmin siirrot on kuitenkin nimetty alkuperäisiä merkintöjä noudattaen. Esimerkiksi kolmanneksi suoritettava oikean sivutahkon 180 asteen kierto on nimeltään B^2, koska valkoisen keskipalan perusteella kyse on sillä hetkellä valkoisesta sivutahkosta.



Kuva 25: Särmäpalojen kierto

6.5 Rubikin asentoryhmän ratkaiseminen

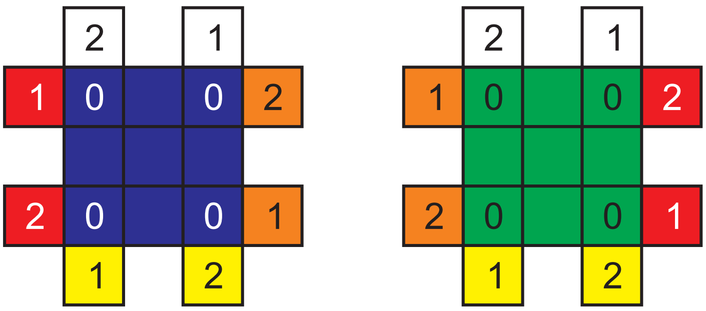
Edellisissä luvuissa on opittu siirtosarjoja, joiden avulla nurkka- tai reunapaloja on mahdollista kiertää paikallaan niin, että yhden palan kiertyessä yhteen suuntaan jokin toinen pala kiertyy samalla päinvastaiseen suuntaan. Tällöin palojen yhteenlaskettu kiertymä eli *kokonaiskiertymä* säilyy. Jotta saataisiin kaikki palat oikeaan asentoon, täytyy tutkia, mitä tuolle kokonaiskiertymälle tapahtuu erilaisissa siirroissa. Koska opitut palojen asentoa muuttavat algoritmit eivät muuta kokonaiskiertymää, olisi toivottavaa, että se säilyisi aina samana kaikissa asemissa, joissa palat ovat oikealla paikallaan. Muuten opitut algoritmit eivät riittäisi asentojen ratkaisemiseen.

Sellaisia ominaisuuksia, jotka säilyvät kaikissa tilanteissa, kutsutaan *invarianteiksi*. Invariantteja käytetään runsaasti esimerkiksi pelien ja algoritmien analysoinnissa. Tällä kurssilla on jo löydetty joitakin tällaisia invariantteja. Esimerkiksi jokainen paikkaryhmän siirto voidaan ilmoittaa muodossa $\nu \circ \sigma$, missä ν on nurkkiin ja σ paikkoihin kohdistuva permutaatio (jotka eivät itse välttämättä sisälly $\mathbb{R}_p$:hen). Lemmassa 5.17 osoitettiin, että $\operatorname{sign}(\nu) \cdot \operatorname{sign}(\sigma) = 1$ pätee kaikissa mahdollisissa asemissa, joten tämä etumerkkien tulo on invariantti.

Vaikka jokin ominaisuus ei säilyisi aivan kaikissa tilanteissa, on yleensä hyödyksi tarkastella, missä tilanteissa kyseinen ominaisuus kuitenkin säilyy ja millä tavoin ominaisuutta voidaan muuttaa. Paikkaryhmän siirroista tiedetään, että jos ne ilmoitetaan edellä kuvatussa muodossa, $\operatorname{sign}(\nu)$ voi olla 1 tai -1. Perussiirrot kuitenkin vaihtavat tuon etumerkin, joten haluttaessa siirtyä yhdestä tilasta toiseen minkä tahansa perussiirron tekeminen riittää. Voidaan myös sanoa, että $\operatorname{sign}(\nu)$ on invariantti, jos siirroiksi sallitaan vain kahden perussiirron yhdistelmät.

Peleissä ja algoritmeissa jonkin ominaisuuden invarianssin osoittamiseksi on yleensä yksinkertaisinta näyttää, että kyseinen ominaisuus säilyy algoritmin perusaskelissa. Tämä lähestymistapa tuottaa kuitenkin ongelmia Rubikin asentojen ryhmässä, koska kuution perussiirrot eivät sisälly asentoryhmään. Jos palat ovat oikeilla paikoillaan mutta väärissä asennoissa, mistä tiedetään, miten sarja perussiirtoja vaikuttaa palojen kokonaiskiertymään? Perussiirto vie palat vääriile paikoille, joissa niiden kiertymä menettää merkityksensä.

Asian ratkaisemiseksi määritellään jokaiselle palalle kiertymän käsite erikseen jokaisessa paikassa, missä pala voi olla. Tämä määrittely voidaan tehdä lähes miten tahansa, koska väärässä paikassa olevalla palalla ei ole mitään tiettyä oikeaa asentoa, vaan jokainen asento on sille samanarvoinen. Aloitetaan antamalla jokaisen nurkkapalan ruuduille numerointi kuvan 26 osoittamalla tavalla. Kuvassa on perusasemassa oleva kuutio kuvattu ylä- ja alapuolelta niin, että nurkkapalat on ikään kuin taiteltu auki.



Kuva 26: Nurkkapalojen numerointi

Kuvatussa numeroinnissa jokainen nurkkaruutu tulee numeroiduksi jollain luvuista 0, 1 ja 2. Laskujen yksinkertaistamiseksi ajatellaan, että nämä ovat syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_3$ alkioita. Tällöin voidaan nimittäin sanoa, että jos ruudulla x on numero n, niin saman palan muiden ruutujen numerot ovat nurkan ympäri myötäpäivään kierrettäessä $n + 1$ ja $n + 2$.

Seuraavaksi merkitään ne ruutujen paikat, joissa on perusasemassa 0-ruutu. Tämä tarkoittaa sitä, että ajatellaan merkityiksi kaikki sinisen ja vihreän sivun nurkkaruutujen paikat riippumatta siitä, mikä ruutu niissä milloinkin sattuu olemaan. Jokaisesta palasta on aina täsmälleen yksi ruutu merkityllä paikalla. Näiden merkkien avulla voidaan määritellä nurkkapalojen kiertymät.

Määritelmä 6.4. Tarkastellaan nurkkapalan x ruutuja asemassa σ. Palan x *kiertymä* $k_x(\sigma) \in \mathbb{Z}_3$ on sen palaan x kuuluvan ruudun numero, joka sattuu olemaan asemassa σ jollakin merkityistä paikoista. Aseman σ *nurkkapalojen kokonaiskiertymä* on kaikkien nurkkapalojen kiertymien summa, ja sitä merkitään $K_N(\sigma) = \sum_x k_x(\sigma)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että nurkkapalojen kokonaiskiertymä ei muutu perussiirroissa. Kokonaiskiertymä on siis invariantti.

Lause 6.5. *Olkoon π jokin perussiirto. Tällöin $K_N(\pi \circ \sigma) = K_N(\sigma)$ kaikissa asemissa $\sigma \in \mathbb{R}$.*

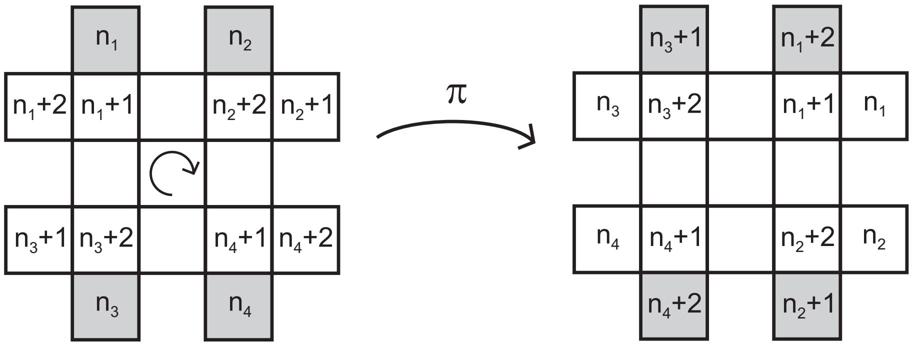
Todistus. Tutkitaan, miten eri perussiirrot vaikuttavat kokonaiskiertymään. Kaikki merkityt paikat ovat kuution ylä- ja alatahkoilla, joten siirrot U ja D siirtävät kaikki merkityllä paikalla olevat ruudut jollekin toiselle merkitylle paikalle. Nämä siirrot eivät siis vaikuta kokonaiskiertymään lainkaan.

Siirrot F, B, L ja R ovat ruutujen numeroinnin ja paikkojen merkitsemisen suhteen symmetrisiä, joten riittää tarkastella yhtä niistä. Valittu siirto vaikuttaa vain niiden palojen kiertymään, jotka sijaitsevat kierrettävällä sivutahkolla. Nimetään nämä palat numeroilla 1, 2, 3 ja 4 ja merkitään jokaisen palan alkuperäistä kiertymää $n_i = k_i(\sigma)$. Kuvassa 27 näkyy, mitä sivutahkon paloille tapahtuu suoritettaessa perussiirto π. Merkityille paikoille osuvat ruudut on tummennettu.

Kuvan mukaan asemassa $\sigma \circ \pi$ saadaan neljän liikkuneen palan kokonaiskiertymäksi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} k_i(\pi \circ \sigma) &= (n_1 + 2) + (n_2 + 1) + (n_3 + 1) + (n_4 + 2) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6 \qquad (\mathbb{Z}_3\text{:ssa } 6 = 0) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4.\end{aligned}$$

Nurkkapalojen kokonaiskiertymä ei siis muutu myöskään perussiirroissa F, B, L tai R. ☐



Kuva 27: Perussiirron vaikutus nurkkapalojen kiertymään

Koska alkuasemassa kokonaiskiertymä on nolla, saadaan edellisestä lauseesta heti seuraava korollaari.

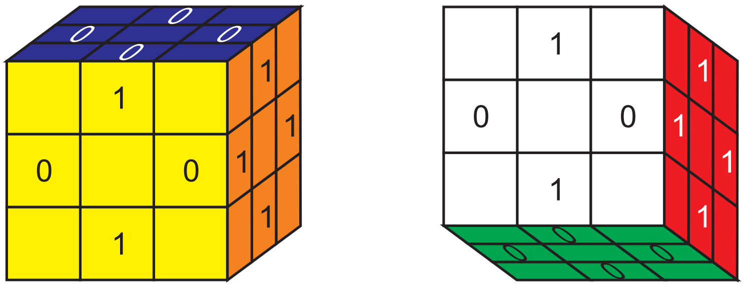
Korollaari 6.6. *Kaikissa asemissa* $\sigma \in \mathbb{R}$ *pätee* $K_N(\sigma) = 0$.

Oletetaan, että nurkkapalat ovat jo oikeilla paikoillaan. Nyt ne saadaan myös oikeisiin asentoihin edellistä korollaaria soveltamalla. Eräs tapa tehdä tämä olisi valita aina kaksi väärässä asennossa olevaa nurkkapalaa, konjugoida ne vierekkäisiksi ja kiertää toinen niistä oikeaan asentoon. Tällä tavalla oikeassa asennossa olevien palojen määrä lisääntyy koko ajan, joten lopulta kaikki palat ovat oikeassa asennossa. Missään vaiheessa jäljellä ei voi olla vain yhtä väärässä asennossa olevaa nurkkapalaa, koska tällöin nurkkien kokonaiskiertymä olisi nollasta poikkeava.

Toinen tapa saada nurkat oikeisiin asentoihin ei vaadi konjugointia. Siinä järjestetään nurkkapalat aluksi jonoon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jossa sama pala voi esiintyä useammin kuin kerran, mutta kaksi peräkkäistä palaa sijaitsevat aina vierekkäin (eli samalla särmällä). Tämän jälkeen käydään läpi paloja jonon alusta lähtien. Aina kun löydetään väärin päin oleva pala x_k, missä $k < n$, käytetään opittua algoritmia paloihin x_k ja x_{k+1}, niin että pala x_k tulee oikeaan asentoon. Lopulta kaikki palat $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ovat oikeassa asennossa, ja koska kokonaiskiertymän on oltava nolla, myös x_n on oikeassa asennossa.

Reunapalojen tapauksessa menetellään aivan samalla tavalla kuin nurkkapaloilla. Tarvittava ruutujen numerointi näkyy kuvasta 28, jossa kuutio on kuvattu perusasemassa edestä ja takaa. Ruutujen numeroiden ajatellaan nyt kuuluvan ryhmään $\mathbb{Z}_2$. Nollaruutuja ovat kaikki siniset ja virheät ruudut ja niissä paloissa, joissa kumpiakaan ei esiinny, keltaiset tai valkoiset ruudut.

Kuten aikaisemmin, perusasemassa olevien nollaruutujen paikat merkitään, ja palan kiertymä määräytyy siitä, mikä palan ruuduista sattuu olemaan merkityllä paikalla.



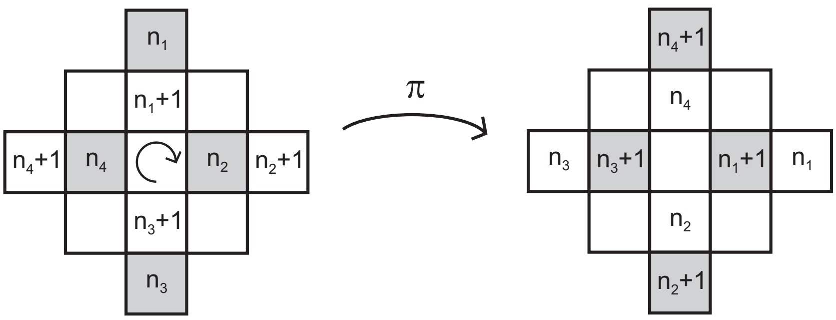
Kuva 28: Reunapalojen numerointi

Määritelmä 6.7. Särmäpalan x *kiertymä* $k_x(\sigma) \in \mathbb{Z}_2$ asemassa σ on sen palaan x kuuluvan ruudun numero, joka sattuu olemaan asemassa σ jollakin merkityistä paikoista. Aseman σ *särmäpalojen kokonaiskiertymä* on kaikkien särmäpalojen kiertymien summa, ja sitä merkitään $K_S(\sigma) = \sum_x k_x(\sigma)$.

Lause 6.8. *Särmäpalojen kokonaiskiertymä* $K_S(\sigma)$ *ei muutu perussiirroissa.*

Todistus. Käydään kaikki perussiirrot läpi. Siirrot U ja D siirtävät jokaisen merkityllä paikalla olevan ruudun jälleen merkitylle paikalle, joten ne eivät muuta kokonaiskiertymää. Toisaalta siirrot L ja R siirtävät jokaisen *merkitsemättömällä* paikalla olevan ruudun jälleen merkitsemättömälle paikalle, joten kokonaiskiertymä ei niissäkään muutu.

Jäljelle jää tutkia, mitä tapahtuu siirroissa F ja B. Ne ovat palojen numeroinnin ja paikkojen merkitsemisen suhteen symmetrisiä, joten riittää tutkia toista niistä. Nimetään siirtoon osallistuvat särmäpalat numeroilla 1, 2, 3 ja 4 ja merkitään näiden kiertymiä alkuperäisessä asemassa $n_i = k_i(\sigma)$. Kuvassa 29 on näytetty, miten perussiirto vaikuttaa palojen kiertymiin. Särmäpalat on taiteltu auki ja merkityillä paikoilla sijaitsevat ruudut tummennettu.



Kuva 29: Perussiirron vaikutus särmäpalojen kiertymään

Kuvasta nähdään, että tarkasteltavien neljän palan kiertymien summaksi tulee uudessa asemassa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} k_i(\pi \circ \sigma) &= (n_1 + 1) + (n_2 + 1) + (n_3 + 1) + (n_4 + 1) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4 \qquad (\mathbb{Z}_2\text{:ssa } 4 = 0) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4.\end{aligned}$$

Reunapalojen kokonaiskiertymä ei siis muutu myöskään perussiirroissa F tai B. $\square$

Särmäpalat voidaan nyt saada oikeisiin asentoihin samalla periaatteella kuin nurkkapalatkin.