3 Tekijäryhmät

Tekijäryhmän käsitteen avulla voidaan monimutkainen ryhmä jakaa suuriin, helpommin käsiteltäviin osiin. Tämän jälkeen voidaan erikseen tarkastella, miten laskutoimitus vaikuttaa näihin osiin kokonaisuutena, ja jättää hetkeksi huomiotta se, mitä itse asiassa tapahtuu kunkin tällaisen osan sisällä.

3.1 Tekijäryhmän määritelmä

Tekijäryhmän määrittelemistä varten määritellään aluksi sivuluokat ja normaalit aliryhmät.

Määritelmä 3.1. Olkoon G jokin ryhmä, jolla on aliryhmä H. Kullakin alkiolla $g \in G$ määritellään H:n *vasen sivuluokka*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Vastaavasti voidaan määritellä *oikea sivuluokka* $Hg = \{hg \mid h \in H\}$.

Sivuluokista voidaan tehdä heti määritelmän perusteella muutamia havaintoja. Ensinnäkin $eH = H$, jos e on ryhmän G neutraalialkio. Aliryhmä on siis itse yksi sivuluokistaan. Toisaalta, koska $e \in H$, kaikilla $g \in G$ pätee $g = g \cdot e \in gH$. Jokainen ryhmän alkio siis kuuluu johonkin sivuluokkaan, eli sivuluokat *peittävät* koko ryhmän G. Nämä havainnot pätevät yhtä hyvin vasemmille kuin oikeillekin sivuluokille.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}, +)$ ja sen aliryhmää

$$4\mathbb{Z} = \{n \in Z \mid n \text{ on jaollinen 4:llä}\}.$$

Etsitään sivuluokat havainnoimalla. Ensinnäkin yksi sivuluokista on $0 + 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$. (Huomaa, että kun ryhmän laskutoimituksena on yhteenlasku, sivuluokkamerkinnässäkin on kertomerkin sijaan +-merkki.)

Muut sivuluokat saadaan lisäämällä eri lukuja aliryhmän $4\mathbb{Z}$ alkioihin:

$$\begin{aligned}
1 + 4\mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\} \\
2 + 4\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\} \\
3 + 4\mathbb{Z} &= \{\ldots, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\} \\
4 + 4\mathbb{Z} &= \{\ldots, 0, 4, 8, 12, 16, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

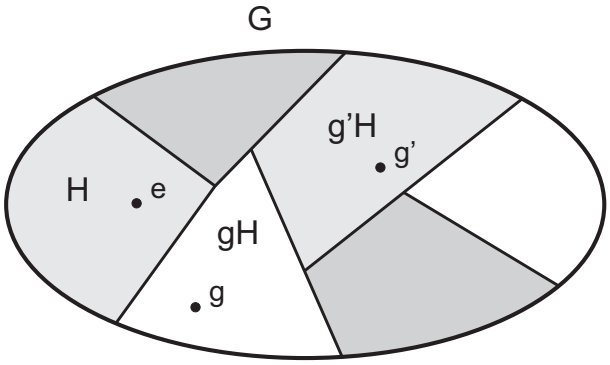
Huomataan, että $4 + 4\mathbb{Z}$ on sama joukko kuin $4\mathbb{Z}$ ja että sivuluokkia ei enää tulee lisää, vaikka kokeiltaisiin uusilla luvuilla: esimerkiksi $13 + \mathbb{Z}$ on sama joukko kuin $1 + \mathbb{Z}$. Jokainen kokonaisluku näyttää nyt kuuluvan johonkin neljästä sivuluokasta $4\mathbb{Z}$, $1 + 4\mathbb{Z}$, $2 + 4\mathbb{Z}$ ja $3 + 4\mathbb{Z}$, ja jokainen näistä sivuluokista sisältää eri lukuja kuin toiset.

Edellisessä esimerkissä huomattiin, että eri sivuluokat eivät sisältäneet samoja alkioita. Tämä on itse asiassa yleinen sääntö, joka voidaan osoittaa esimerkiksi seuraavasti: oletetaan, että $x \in g_1H \cap g_2H$ eli että $x = g_1h_1$ ja $x = g_2h_2$ joillain $h_1, h_2 \in H$. Tällöin $g_1 = xh_1^{-1}$, ja kaikilla $h' \in H$ pätee

$$g_1h' = xh_1^{-1}h' = g_2 \underbrace{h_2h_1^{-1}h'}_{\in H} \in g_2H,$$

joten $g_1H \subset g_2H$. Samalla tavoin nähdään myös, että $g_2H \subset g_1H$. Siispä aina pätee joko $g_1H = g_2H$ tai $g_1H \cap g_2H = \emptyset$.

Jonkin aliryhmän vasemmat tai oikeat sivuluokat muodostavat siis koko ryhmän osituksen (ks. kuva 6). Tarkoituksena olisi nyt unohtaa sivuluokkien varsinainen sisältö ja tutkia sitä, miten laskutoimitus kohtelee näitä sivuluokkina kokonaisuutena. Olisi siis tarkoitus laskea *kokonaisten sivuluokkien tuloja* $g_1H \cdot g_2H$. Tällainen tulo on joukko, joka sisältää kaikki sellaiset alkiot $g_1h_1g_2h_2$, joille pätee $h_1, h_2 \in H$. Kyseessä on sama joukko kuin $g_1 \cdot (Hg_2) \cdot H$, eli H:n *oikean* sivuluokan Hg_2 alkiot kerrottuina vasemmalta alkiolla g_1 ja oikealta kaikilla aliryhmän H alkioilla.



Kuva 6: Aliryhmän H sivuluokat

Ongelmana on nyt se, että joukko $g_1H \cdot g_2H$ ei välttämättä ole itse sivuluokka. Tällaisessa tapauksessa ei kokonaisiin sivuluokkiin rajoittumisesta olisi paljon iloa, kun sivuluokkien joukko ei olisi suljettu niiden laskutoimituksen suhteen. Ongelma

kuitenkin ratkeaa, mikäli H:n vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samoja. Tällöin nimittäin pätee

$$g_1H \cdot g_2H = g_1 \cdot (Hg_2) \cdot H = g_1 \cdot (g_2H) \cdot H = (g_1g_2)H \cdot H = (g_1g_2)H,$$

ja näin ollen osien g_1H ja g_2H tuloksi tulee yksinkertaisesti osa $(g_1g_2)H$.

Määritelmä 3.3. Ryhmän G aliryhmää H kutsutaan *normaaliksi aliryhmäksi*, mikäli H:n vasemman- ja oikeanpuoleiset sivuluokat ovat samat eli kaikilla $g \in G$ pätee $gH = Hg$. Jos H on G:n normaali aliryhmä, merkitään $H \trianglelefteq G$.

Huom. Jos ryhmä on vaihdannainen, sen jokainen aliryhmä on normaali, sillä on aivan sama, kertooko g aliryhmän alkioita vasemmalta vai oikealta puolelta.

Seuraava lause antaa helposti tarkistettavan kriteerin sille, onko jokin aliryhmä normaali vai ei.

Lause 3.4. *Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Aliryhmä H on normaali täsmälleen silloin, kun kaikilla $g \in G$ pätee $gHg^{-1} \subset H$ eli*

$$ghg^{-1} \in H \quad \textit{jokaisella } h \in H.$$

Todistus. Ryhmä on normaali, jos kaikilla $g \in G$ pätee $gH = Hg$. Kun yhtälön molemmilla puolilla olevien joukkojen alkiot kerrotaan oikealta g:n käänteisalkiolla, saadaan joukkoyhtälö $H = gHg^{-1}$. Tämä yhtälö pätee siis kaikilla $g \in G$ täsmälleen silloin, kun H on normaali. Tästä nähdään heti, että jos H on normaali, niin myös $gHg^{-1} \subset H$ pätee kaikilla $g \in G$.

Oletetaan sitten, että $g^{-1}Hg \subset H$ pätee kaikilla $g \in G$. Olkoot $h \in H$ ja $g \in G$. Nyt myös $g^{-1} \in G$, joten oletuksen mukaan $g^{-1}h(g^{-1})^{-1} = g^{-1}hg \in H$. Edelleen

$$h = g\underbrace{g^{-1}hg}_{\in H}g^{-1} \in gHg^{-1},$$

mistä seuraa, että $H \subset gHg^{-1}$. Näin ollen $H = gHg^{-1}$ kaikilla $g \in G$, ja H on normaali. □

Esimerkki 3.5. Ryhmä S_3 koostuu kuudesta alkiosta: (12), (23), (13), (123), (132) ja id. Tarkistetaan, onko aliryhmä $H = \langle(123)\rangle = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$ normaali. Lasketaan sitä varten muotoa ghg^{-1} olevat tulot, missä $h \in H$. Niissä tapauksissa, joissa $g \in H$ tai $h = \mathrm{id}$, tulo kuuluu selvästi aliryhmään H. Toisaalta silloin, kun $g \notin H$, alkio g on vaihto, joten $g^{-1} = g$. Laskettavat tulot ovat siis itse asiassa muotoa ghg. Saadaan

$$\begin{aligned}
(12)(123)(12) &= (132), & (12)(132)(12) &= (123)\\
(23)(123)(23) &= (132), & (23)(132)(23) &= (123)\\
(13)(123)(13) &= (132), & (13)(132)(13) &= (123).
\end{aligned}$$

Koska jokainen tulo ghg^{-1} kuuluu aliryhmään H, kyseinen aliryhmä on normaali.

Olkoon nyt $H' = \langle(12)\rangle = \{\mathrm{id}, (12)\}$. Tämä aliryhmä ei ole normaali, sillä esimerkiksi

$$(123)(12)(123)^{-1} = (123)(12)(321) = (23) \notin H'.$$

Määritelmä 3.6. Olkoon $H \trianglelefteq G$. Ryhmää, jonka alkioita ovat sivuluokat gH, missä $g \in G$, kutsutaan *tekijäryhmäksi*. Tekijäryhmää merkitään G/H, ja sen laskutoimitus noudattaa sääntöä $g_1H \cdot g_2H = (g_1g_2)H$. Tekijäryhmän alkioita voidaan merkitä myös $gH = [g]$, jolloin laskusäännöksi tulee $[g_1][g_2] = [g_1g_2]$.

Esimerkki 3.7. Koska ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on vaihdannainen, sen kaikki aliryhmät ovat normaaleja. Tutkitaan tekijäryhmää $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Tämän tekijäryhmän alkiot ovat aiemmassa esimerkissä määritetyt neljä sivuluokkaa $\mathbb{Z} = [0]$, $1 + \mathbb{Z} = [1]$, $2 + \mathbb{Z} = [2]$ ja $3 + \mathbb{Z} = [3]$. Kyseessä on siis äärellinen 4 alkion ryhmä. Tekijäryhmän laskutoimituksen määritelmän mukaan esimerkiksi $[1] + [2] = [1 + 2] = [3]$ ja $[3] + [4] = [7] = [3]$, missä viimeinen yhtäsuuruus tulee siitä, että sivuluokat $7 + \mathbb{Z}$ ja $3 + \mathbb{Z}$ ovat sama joukko. Laskemalla kaikki mahdolliset summat voidaan muodostaa tekijäryhmän *laskutoimitustaulu*:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$

.

3.2 Rubikin ryhmän jako paikkojen ja asentojen mukaan

Tarkastellaan sellaista Rubikin ryhmän osajoukkoa $\mathbb{R}_a$, jonka permutaatiot pitävät kuution jokaisen palan paikallaan, vaikka voivatkin muuttaa niiden asentoa.

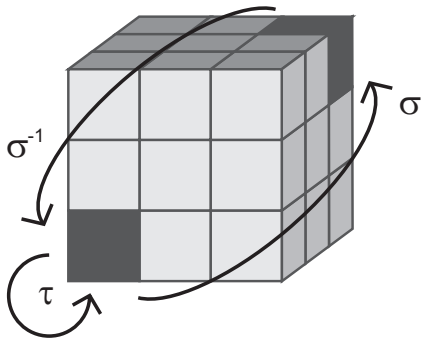
Lause 3.8. *Osajoukko $\mathbb{R}_a$ on Rubikin ryhmän normaali aliryhmä.*

Todistus. Helposti nähdään, että $\mathbb{R}_a$ on Rubikin ryhmän aliryhmä. Jos nimittäin permutaatiot σ ja τ pitävät kaikki kuution palat paikoillaan, myös niiden yhdistelmä $\sigma\tau$ pitää palat paikoillaan. Toisaalta identtinen permutaatio pitää palat paikoillaan, ja jos σ ei liikuta paloja, ei myöskään käänteiskuvaus σ^{-1} liikuta niitä.

Osoitetaan sitten, että aliryhmä $\mathbb{R}_a$ on normaali käyttämällä aiemmin todistettua kriteeriä 3.4. Olkoot $\tau \in \mathbb{R}_a$ ja $\sigma \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan yhdistelmää $\sigma\tau\sigma^{-1}$ siltä kannalta, liikuttaako se paloja vai ei.

Jos σ siirtää jonkin palan paikasta A paikkaan B, niin σ^{-1} siirtää kyseisen palan takaisin paikasta B paikkaan A. Koska τ puolestaan pitää tuon palan paikallaan

kohdassa A, ei yhdistelmä liikuta lainkaan kyseistä palaa (ks. oheinen kuva). Sama päättely voidaan tehdä jokaisen palan kohdalla, joten yhdistelmä ei liikuta paloja. Näin ollen $\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathbb{R}_a$, ja $\mathbb{R}_a$ on normaali. □

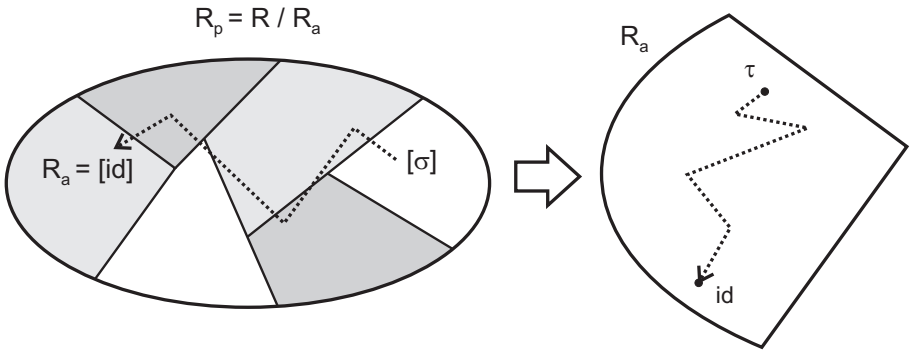


Kuva 7: Yhdistelmä $\sigma\tau\sigma^{-1}$ ei siirrä paloja

Kutsutaan aliryhmää $\mathbb{R}_a$ *Rubikin asentoryhmäksi*. Koska asentoryhmä on normaali, voidaan määritellä tekijäryhmä $\mathbb{R}_p = \mathbb{R}/\mathbb{R}_a$. Tätä tekijäryhmää kutsutaan puolestaan *Rubikin paikkaryhmäksi*. Tekijäryhmän alkiot ovat sivuluokkia $[\sigma]$. Aina kun $[\sigma_1] = [\sigma_2]$, täytyy päteä $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \tau$ jollain $\tau \in \mathbb{R}_a$. Tämä tarkoittaa sitä, että saman sivuluokan alkiot eroavat toisistaan vain jonkin sellaisen siirron verran, joka ei muuta palojen paikkoja. Tekijäryhmä voidaan nähdä permutaatioryhmänä, jonka alkiot permutoivat kuution *paloja* niiden asennoista välittämättä.

Yllä kuvatun jaon merkitys on siinä, että sen avulla voidaan hetkeksi unohtaa, missä asennoissa kuution palat ovat, ja keskittyä palojen liikuttamiseen. Kuution ratkaisemiseksi olisi annetusta asemasta σ lähtien löydettävä perussiirtojen ketju, joka palauttaisi kuution perusasemaan id. Edetään ratkaisussa nyt niin, että yritetään ensin palauttaa *paikkaryhmässä* asema $[\sigma]$ asemaksi $[\mathrm{id}]$. Koska $[\mathrm{id}] = \mathbb{R}_a$, niin tässä asemassa kaikki palat ovat jo oikeilla paikoillaan, mutta ne voivat olla vielä väärissä asennoissa. Tämän jälkeen katsotaan tarkemmin, mihin asemaan τ aliryhmässä $\mathbb{R}_a$ ollaan päädytty, ja yritetään palauttaa tämä asema vielä perusasemaksi id. Nämä vaiheet näkyvät kuvassa 8.

Huomaa, että toisinpäin eli asentoryhmästä paikkaryhmään eteneminen olisi mahdotonta, sillä paloilla ei voi ajatella olevan mitään “oikeita asentoja”, elleivät ne ole oikeilla paikoillaan. Tämän seikan algebrallinen tulkinta on se, että aliryhmässä on aina neutraalialkio, mutta muissa sivuluokissa ei ole mitään tähän rinnastettavaa erityistä alkiota. Jos siis asema sijaitsee jossain väärässä sivuluokassa, ei sivuluokan sisällä ole mitään tiettyä suuntaa, johon ratkaisussa kannattaisi edetä.



Kuva 8: Ratkaisun vaiheet

3.3 Algoritmi 1: nurkkapalojen 3-sykli

Kuten yllä todettiin, paikkaryhmää $\mathbb{R}_p$ voidaan ajatella kuution palojen permutaatioryhmänä. Kukin sivuluokka $[\sigma]$ vastaa sitä palojen permutaatiota, jonka σ aiheuttaa. Jos kaksi permutaatiota siirtävät paloja samalla tavalla, ne kuuluvat samaan sivuluokkaan.

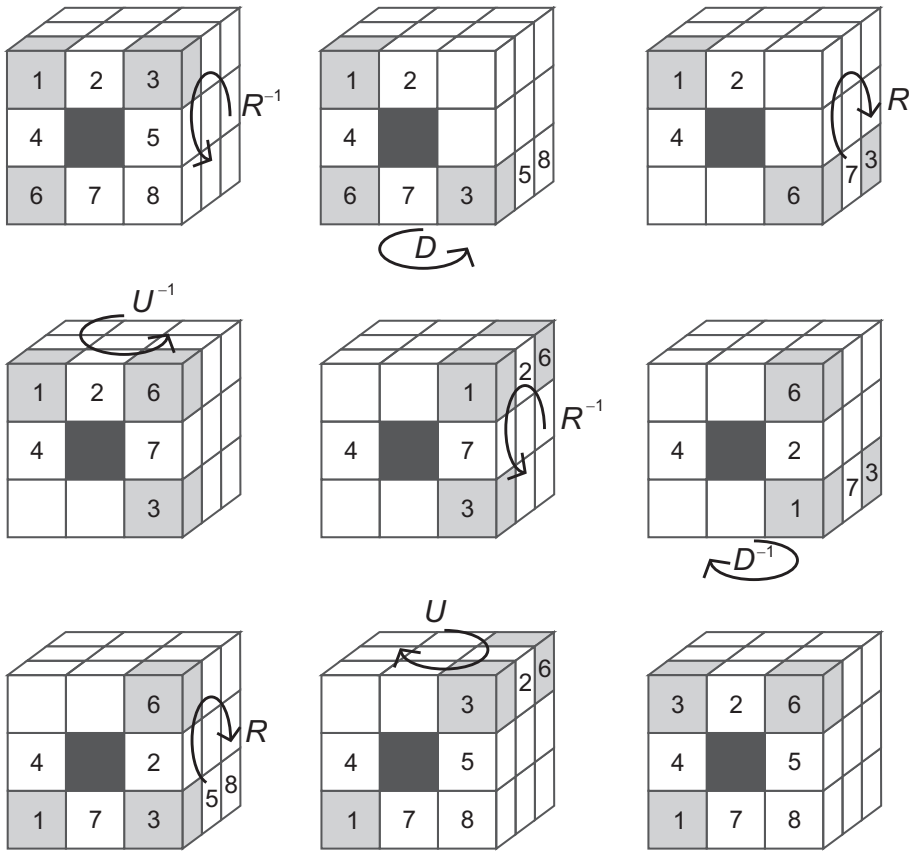
Seuraavaksi kuvattava algoritmi tuottaa 3-syklin palojen paikkoja permutoivassa ryhmässä $\mathbb{R}_p$. Jos kuutio asetetaan siten, että keltainen sivu on katsojaan päin ja sininen sivu ylöspäin, ja keltaisen sivun palat numeroidaan vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas keskipalaa lukuunottamatta numeroilla $\{1, \ldots, 8\}$, niin saatava 3-sykli on (316). Se koostuu kahdenlaisista siirroista: ensimmäinen on perussiirto $\sigma = U$ ja toinen kolmen perussiirron yhdistelmä $\tau = RD^{-1}R^{-1}$. Näistä kootaan lopuksi yhdistelmä $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Kokonaisuudessa siirtosarja on siis seuraavanlainen:

$$(316) = URD^{-1}R^{-1}U^{-1}RDR^{-1}.$$

Tämä siirtosarja, kuten kaikki permutaatioiden yhdistelmät, suoritetaan oikealta vasemmalle.

Kuvassa 9 esitetään koko siirtosarja vaihe kerrallaan. Huomaa erityisesti, miten yhdistelmät $\sigma\tau$ ja $\sigma^{-1}\tau^{-1}$ käsittelevät 3-sykliin kuulumattomia paloja. Nämä palat siirtyvät ensin permutaatiossa $\sigma^{-1}\tau^{-1}$ jonnekin, mistä ne sitten palaavat takaisin permutaatiossa $\sigma\tau$. Näiden palojen osalta siis näyttäisi siltä, että kyseiset permutaatiot olisivat toistensa käänteissiirtoja, vaikka tosiasiassa $\sigma^{-1}\tau^{-1} = (\tau\sigma)^{-1} \neq (\sigma\tau)^{-1}$. Permutaatioiden $\tau\sigma$ ja $\sigma\tau$ (tai niiden käänteisalkioiden) ero tulee näkyviin vain 3-sykliin osallistuvissa paloissa. Tästä puhutaan lisää myöhemmin.

Algoritmin opettelu helpottuu, kun huomaa, että permutaatio τ eroaa permutaatiosta τ^{-1} vain siinä, että jälkimmäisessä on toisena siirtona perussiirto D, edellisessä D^{-1}. Koko sykli voidaan helposti myös kiertää vastakkaiseen suuntaan.



Kuva 9: Nurkkapalojen 3-sykli

Tarvittava käänteisalkio on

$$(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})^{-1} = (\tau^{-1})^{-1}(\sigma^{-1})^{-1}\tau^{-1}\sigma^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}.$$

Käänteisalkiossa tehdään siis edelleen ensin käänteispermutaatiot; eroa alkuperäiseen 3-sykliin on siis siinä, että σ-permutaatiot tehdään ennen τ-permutaatioita.

3.4 Alternoivat ryhmät

On helppo todeta, että parilliset permutaatiot muodostavat symmetrisen ryhmän S_n aliryhmän. Tätä aliryhmää nimitetään *alternoivaksi ryhmäksi* ja merkitään

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}.$$

Tässä luvussa osoitetaan, että alternoiva ryhmä on normaali ja että se jakaa symmetrisen ryhmän kahteen yhtä suureen sivuluokkaan, joista toinen siis sisältää kaikki parittomat permutaatiot.

Lause 3.9. *Alternoiva ryhmä A_n on normaali ryhmässä S_n.*

Todistus. Käytetään lauseen 3.4 normaalisuuskriteeriä. Olkoot $\tau \in A_n$ ja $\sigma \in S_n$ mielivaltaisia. Tarkastellaan yhdistelmän $\sigma\tau\sigma^{-1}$ etumerkkiä. Ensinnäkin havaitaan, että

$$\operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1,$$

joten $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$. Näin ollen

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)^2 \operatorname{sign}(\tau) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Nähdään, että $\sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$, jolloin voidaan päätellä, että $\sigma A_n \sigma^{-1} \subset A_n$. Aliryhmä A_n on siis normaali. □

Seuraavaksi ryhdytään tutkimaan, kuinka monesta alkiosta alternoiva ryhmä koostuu. Apuna käytetään algebran kurssilta tuttua *Lagrangen lausetta*, joka muistin virkistämiseksi mainitaan tässä ilman todistusta.

Lause 3.10 (Lagrange)**.** *Olkoon G äärellinen ryhmä, ja $H \leq G$. Tällöin aliryhmän alkioiden lukumäärä $|H|$ jakaa koko ryhmän alkioiden lukumäärän $|G|$. Lisäksi aliryhmän H vasemman- ja oikeanpuoleisia sivuluokkia on yhtä paljon, ja niiden lukumäärä on $|G|/|H|$.*

Lagrangen lause sanoo siis, että sivuluokat jakavat ryhmän *tasan* yhtä suuriin osiin. Sivuluokkien lukumäärään nimitetään aliryhmän *indeksiksi* ja merkitään $[G : H]$.

Jotta voitaisiin päätellä alternoivan ryhmän koko, tarvitsee siis vain selvittää, kuinka monta sivuluokkaa sillä on. Koska parilliset permutaatiot sisältyvät kaikki yhteen sivuluokkaan, muissa sivuluokissa voi olla vain parittomia permutaatioita. Osoittautuu, että myös parittomat permutaatiot muodostavat yhden ainoan sivuluokan, jolloin Lagrangen lauseesta seuraa, että kumpikin sivuluokka sisältää täsmälleen puolet ryhmän alkioista.

Lause 3.11. *Alternoivalla ryhmällä A_n on täsmälleen kaksi sivuluokkaa, jos $n \geq 2$. Toisin sanoen alternoivan ryhmän indeksi $[S_n : A_n]$ on 2, jos $n \geq 2$.*

Huom. Todistus seuraisi suoraan nk. *homomorfialauseesta*, koska kuvaus sign : $S_n \to \{-1, 1\}$ on homomorfismi, jonka ydin on A_n ja joka on surjektiivinen, jos $n \geq 2$. Homomorfialauseen mukaan nimittäin tekijäryhmä S_n/A_n on tällöin isomorfinen kahden alkion ryhmän $\{-1, 1\}$ kanssa. Seuraavassa annetaan kuitenkin suora todistus, joka ei käytä homomorfialausetta.

Todistus. Ensimmäiseksi havaitaan, että jos $n \geq 2$, niin ryhmä S_n sisältää vaihdon (12). Vaihto on pariton, joten $(12) \notin A_n$, ja näin ollen sivuluokkia on vähintään kaksi.

Olkoon sitten edelleen $n \geq 2$ ja olkoon σ jokin pariton permutaatio. Osoitetaan, että $\sigma \in (12) \circ A_n$. Ensinnäkin

$$\operatorname{sign}((12)^{-1}\sigma) = \operatorname{sign}((12)) \cdot \operatorname{sign}(\sigma) = -1 \cdot (-1) = 1,$$

joten $(12)^{-1}\sigma \in A_n$. Täten

$$\sigma = (12) \circ \underbrace{(12)^{-1}\sigma}_{\in A_n} \in (12) \circ A_n.$$

Koska σ oli mielivaltainen pariton permutaatio, nähdään, että jokainen pariton permutaatio kuuluu samaan sivuluokkaan. Siispä sivuluokkia on tasan kaksi. □

Symmetrinen ryhmä jakautuu siis tasan kahteen sivuluokkaan, joista toinen sisältää kaikki parilliset permutaatiot ja toinen kaikki parittomat. Sivuluokasta toiseen voidaan siirtyä kertomalla annettu permutaatio millä tahansa parittomalla permutaatiolla.

Pienimpiä epätriviaaleja parillisia permutaatioita ovat 3-syklit. Todistetaan vielä luvun lopuksi, että 3-syklien avulla voidaan muodostaa kaikki muutkin parilliset permutaatiot.

Lause 3.12. *Syklit, joiden pituus on 3, virittävät alternoivan ryhmän.*

Todistus. Tarkastellaan mielivaltaista identtisestä kuvauksesta poikkeavaa permutaatiota $\sigma \in A_n$. Koska σ on parillinen, se voidaan kirjoittaa tulona

$$\pi_1\rho_1 \circ \pi_2\rho_2 \circ \cdots \circ \pi_m\rho_m,$$

missä jokainen π_k ja jokainen ρ_k on vaihto. Osoitetaan, että jokainen yhdistelmä $\pi_k\rho_k$ voidaan korvata joko 3-syklien tulolla tai neutraalialkiolla. Kun muistetaan, että $(ab) = (ba)$ kaikilla $a, b \in N_n$, saadaan kolme tapausta:

1) jos $\pi_k\rho_k$ on muotoa $(ab)(ab)$, niin $\pi_k\rho_k = \mathrm{id}$

2) jos $\pi_k\rho_k$ on muotoa $(ab)(bc)$, niin $\pi_k\rho_k = (abc)$

3) jos $\pi_k\rho_k$ on muotoa $(ab)(cd)$, niin $\pi_k\rho_k = (abc)(bcd)$.

Näin ollen σ voidaan kirjoittaa 3-syklien tulona. □