

Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Harjoitus 6  
16.12.2010

1. Osoita, että neliön symmetriaryhmä  $D_8$  voidaan muodostaa tasan kolmella eri tavalla kahden epätriviaalin aliryhmänsä puolisuorana tulona.
2. Olkoon  $n > 2$ . Osoita, että  $S_n$  voidaan kirjoittaa kahden epätriviaalin aliryhmänsä puolisuorana tulona.
3. Ryhmän  $G$  kaikkien kommutaattorien virittämää aliryhmää kutsutaan *kommutaattorialiryhmäksi* tai *derivoituksi ryhmäksi* ja merkitään  $G'$ . Kommutaattorialiryhmän koko kertoo ryhmän vaihdannaisuudesta. Mitä pienempi on ryhmän keskus, sitä suurempi kommutaattorialiryhmä.
  - a) Näytä, että symmetrisen ryhmän  $S_n$  keskus on triviaali, kun  $n > 2$ .
  - b) Osoita, että  $S'_n = A_n$ .
4. Olkoon  $G$  ryhmä.
  - a) Osoita, että kommutaattorialiryhmä  $G'$  on ryhmän  $G$  normaali aliryhmä (ks. ed. teht.).
  - b) Osoita, että tekijäryhmä  $G/G'$  on vaihdannainen.

*Neuvo kohtaa a) varten:* Käytä normalisuuskriteeriä. Huomaa, että riittää osoittaa, että aliryhmän virittäjien konjugaatit ovat aliryhmässä.
5. Osoita, että tuloryhmän  $\mathbb{R}_{np} \times \mathbb{R}_{ns}$  indeksi Rubikin paikkaryhmässä  $\mathbb{R}_p$  on täsmälleen kaksi.

*Ohje:* Käytä lemmaa 5.17 ja lausetta 5.18. Esimerkiksi perussiirot eivät voi kuulua tuloryhmään.
6. Tarkastellaan materiaalin kuvassa 14 näkyvää C-tyyppistä kolmen nurkkapalan kombinaatiota (mitkään kaksi nurkkapalaa eivät ole vierekkäisissä nurkissa). Etsi Rubikin ryhmän siirrot  $\sigma$  ja  $\tau$ , joiden kommutaattori  $[\sigma, \tau]$  on niiden kolmen nurkkapalan 3-sykli. Toimi samaan tapaan kuin luentomateriaalin luvussa 6.2