Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 5 (2 sivua)
9.12.2010

1. Olkoot G_1 ja G_2 ryhmiä, neutraalialkioinaan e_1 ja e_2. Osoita, että tekijäryhmä $(G_1 \times G_2)/(G_1 \times \{e_2\})$ on isomorfinen ryhmän G_2 kanssa.

   Vihje. Tutki kyseisen tekijäryhmän sivuluokkia ja määrittele sopiva, yksinkertainen kuvaus φ ryhmältä G_2 tekijäryhmälle. Vaihtoehtoisesti voit käyttää ryhmien homomorfilausetta.

2. Olkoon p jokin alkuluku. Osoita, että $\mathbb{Z}_{p^2} = \{[0], [1], \ldots, [p^2 - 1]\}$ ei ole minkään kahden epätriviaalin aliryhmänsä suora tulo.

   Neuvo. Muistele, millaisia syklisten ryhmien aliryhmät ovat.

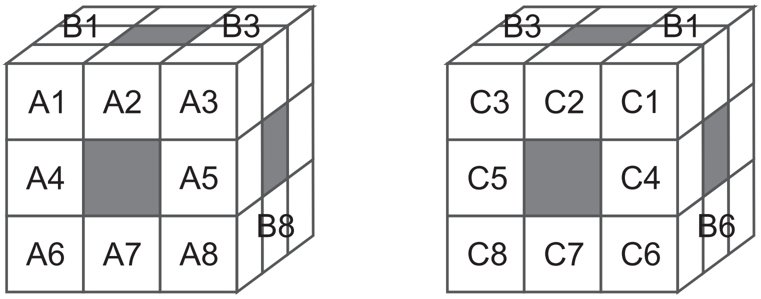
3. Olkoot σ ja τ joukon X permutaatioita ja x joukon X alkio. Osoita, että
   a) $\sigma(x) \in \operatorname{supp}(\sigma)$ jos ja vain jos $x \in \operatorname{supp}(\sigma)$
   b) $\operatorname{supp}(\sigma) = \operatorname{supp}(\sigma^{-1})$
   c) $\operatorname{supp}(\sigma \circ \tau) \subset \operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\tau)$.

4. a) Ryhmällä S_5 on aliryhmät $H = \{(1), (123), (132), (12), (13), (23)\} \cong S_3$ ja $K = \{(1), (45)\} \cong S_2$. Ne muodostavat suoran tulon ryhmässä S_5. Ryhmällä on myös normaali aliryhmä $N = A_5$. Määritä tekijäryhmät $H/(H \cap N)$ ja $K/(K \cap N)$.
   b) Lauseen 5.15 todistuksen nojalla tekijäryhmiä $H/(H \cap N)$ ja $K/(K \cap N)$ voidaan ajatella ryhmän G/N aliryhminä. Määritä tekijäryhmiä vastaavat G/N:n aliryhmät ja osoita, että ne eivät muodosta suoraa tuloa. Näin ollen lauseen 5.15 kohta b) ei päde yleisessä tapauksessa.
   c) Jos olet käynyt kurssin Algebra II, anna vaihtoehtoinen todistus lauseen 5.15 kohdalle a) käyttäen Noetherin isomorfialauseita.

5. Olkoot g ja h ryhmän G alkioita. Yhdistelmää
$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$$
kutsutaan alkioiden g ja h *kommutaattoriksi*.
   Olkoon e ryhmän G neutraalialkio. Osoita, että kaikilla $g, h, k \in G$ pätee
   i) $[g, h] = e$ täsmälleen silloin, kun a ja b kommutoivat
   ii) $[g, h] = {}^{g}h \cdot h^{-1} = g \cdot {}^{h}(g^{-1})$
   iii) $[g, h] = [h, g]^{-1}$
   iv) ${}^{g}[h, k] = [{}^{g}h, {}^{g}k]$
   v) $[g, h] \cdot g = g \cdot [h, g^{-1}]$ ja $[g, h] \cdot h = h \cdot [h^{-1}, g]$.

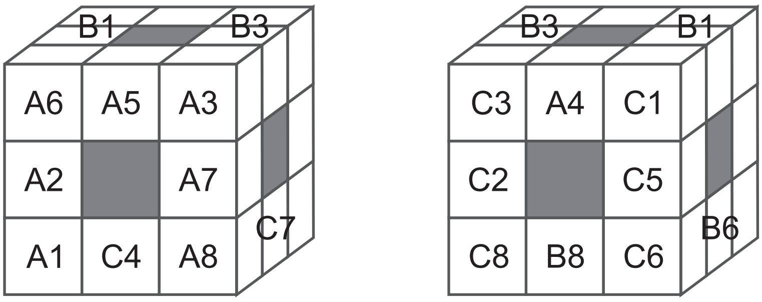
KÄÄNNÄ

6. Merkitään Rubikin kuution palat perusasemassa oheisen kuvan mukaisella tavalla kirjaimin A1,. . . , A8, B1, B3, B6, B8, C1, . . . , C8. Sininen sivu on ylöspäin ja keltainen sivu osoittaa katsojaan päin.



edestä takaa

Tarkoituksena on löytää siirtosarja, jolla alla olevan kuvan mukaisesta tilanteesta lähtien saadaan kuution palat palautettua perusasemaan.



edestä takaa

a) Mieti ensin, onko sekoitettu asema tuloryhmässä $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_s$. Jollei ole, valitse jokin siirto, jolla saat palautettua aseman tuloryhmään.
b) Kirjoita sitten tarvittavaa siirtosarjaa vastaavan permutaation sykliesitys. Jos alkuperäisen aseman palan a paikalla on uudessa asemassa pala b, on permutaation kuvattava $a \mapsto b$. (Tässä kohdassa voi ajatella toisinpäinkin, eli kuvata $b \mapsto a$. Siirto vain muuttuu käänteissiirrokseen.)
c) Ratkaise sykliesityksestä, miten tarvittavan siirtosarjan permutaatio voidaan kirjoittaa tulona nurkkapalojen ja särmäpalojen 3-sykleistä. Apuna voit käyttää lausetta 3.12.
d) Kirjoita tarvittavat 3-syklit opittujen perussyklien konjugaattien avulla. Tässä kohdassa helpottaa, jos konjugoimisen sijasta selviää kääntämällä koko kuutiota ja nimeämällä perussiirrot uudestaan.