Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 4
2.12.2010

1. Tarkastellaan esimerkissä 4.9 esiintynyttä neliön symmetriaryhmää
$$\begin{aligned} D_8 = \{ \ &\mathrm{id},\ (1234),\ (13)(24),\ (1432),\\ &(12)(34),\ (24),\ (14)(23),\ (13) \ \} \le S_4. \end{aligned}$$
Etsi jokaisen alkion $x \in D_8$ keskittäjä ja laske indeksi $[D_8 : C_G(x)]$. Vertaa kutakin indeksiä alkion x konjugaattiluokan kokoon. Mitkä alkioista kuuluvat ryhmän keskukseen?

2. a) Olkoon G ryhmä ja $g \in G$. Osoita, että konjugointikuvaus $\kappa_g \colon G \to G$, $\kappa_g(x) = gxg^{-1}$ on ryhmäisomorfismi.
   b) Osoita, että ryhmän keskus on vaihdannainen ja normaali aliryhmä. Näytä lisäksi sopivien vastaesimerkkien avulla, että keskittäjät eivät välttämättä ole vaihdannaisia tai normaaleja.

3. Olkoon G ryhmä. Merkitään $C = \zeta G$. Oletetaan, että tekijäryhmä G/C on syklinen eli että sen kaikki alkiot saadaan jonkin sivuluokan xC potensseina. Osoita, että ryhmä G on vaihdannainen.

   Vihje: Jokainen sivuluokka on muotoa $(xC)^n = x^n C$.

4. Osoita, että Rubikin ryhmän keskus sisältyy asentoryhmään $\mathbb{R}_a$.

   Neuvo: Keskukseen kuuluvat ne alkiot, jotka eivät muutu missään konjugoinneissa. Näytä sopivilla siirroilla, että kaikki paloja liikuttavat siirrot voidaan konjugoida liikuttamaan paloja toisella tavalla.

5. Osoita, että neliön symmetriaryhmä D_8 (ks. tehtävä 1) ei ole minkään aliryhmiensä suora tulo. Aliryhmät on etsitty harjoitusten 3 tehtävässä 5.

6. Luentojen määritelmän mukaan ryhmän G aliryhmät H ja K muodostavat sisäisen suoran tulon, jos seuraavat ehdot toteutuvat:
   1) $hk = kh$ kaikilla $h \in H$ ja $k \in K$
   2) $H \cap K = \{e\}$, missä e on G:n neutraalialkio.

   Luennolla todistettiin myös, että sisäinen suora tulo toteuttaa seuraavat ehdot:
   1') H ja K ovat G:n normaaleja aliryhmiä
   2') jokaisella $g \in G$ on yksikäsitteinen esitys $g = hk$, missä $h \in H$ ja $k \in K$.

   Osoita, että sisäisen suoran tulon määritelmässä voidaan korvata ehto 1) ehdolla 1') ja ehto 2) ehdolla 2') (jompikumpi tai molemmat).