Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 3
8.4.2008

1. Olkoon G ryhmä, H sen osajoukko ja $g \in G$. Osoita:
   a) ${}^gH \leq G$ jos ja vain jos $H \leq G$
   b) ${}^gH \trianglelefteq G$ jos ja vain jos $H \trianglelefteq G$.

2. Osoita, että jos A ja B ovat konjugaattiluokkia, joille pätee $A \cap B \neq \emptyset$, niin $A = B$. Eri konjugaattiluokat ovat siis erillisiä.

3. Määritä ryhmän A_4 konjugaattiluokat.

4. Olkoon G ryhmä. Alkion $x \in G$ *keskittäjä* on joukko
$$C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}.$$
Näytä, että alkion keskittäjä on aina ryhmän G aliryhmä. Osoita, että myös G:n *keskus*
$$\zeta G = \{g \in G \mid gx = xg \text{ kaikilla } x \in G\}$$
on G:n aliryhmä.

5. Etsi ryhmän D_8 kaikki aliryhmät. Mitkä niistä ovat normaaleja?

6. Tarkastellaan Rubikin paikkaryhmää $\mathbb{R}_p$. Numeroidaan kuution nurkkapalat oheisen kuvan mukaisesti.
a) Osoita parillisuusperustelun avulla, että neljän nurkkapalan sykli (1234), missä mikään muu pala ei liiku, ei ole mahdollinen siirto.
b) Oletetaan, että palat on numeroitu niin, että luennoilla esitelty 3-sykli on $\sigma = (123)$. Esitä siirto (12)(78) permutaation σ sekä sen konjugaattien ${}^\tau\sigma$ tulona. (Kirjoita konjugaatit perussiirtojen avulla.)