

Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 2
18.11.2010

1. Olkoon $H \leq G$ ja olkoot $g_1, g_2 \in G$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
 - (a) $g_1H = g_2H$
 - (b) $g_1 \in g_2H$
 - (c) $g_1^{-1}g_2 \in H$.

2. Tarkastellaan yhteenlaskuryhmää $\mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Tämä tekijäryhmä koostuu alkioista $[0], \dots, [14]$, joille pätee $[a] = [b]$ jos ja vain jos $a - b$ on jaollinen luvulla 15. Ryhmällä on normaali aliryhmä $H = \{[0], [5], [10]\}$. Etsi kaikki H :n sivuluokat ja esitä tekijäryhmän \mathbb{Z}_{15}/H laskutoimitustaulu.

3. Olkoon G äärellinen ryhmä ja H sen jokin aliryhmä. Merkitään ryhmien G ja H alkioiden lukumääriä $|G|$ ja $|H|$ sekä H :n vasemmanpuoleisten sivuluokkien lukumäärää $[G : H]$. Totea, että myös H :n oikeanpuoleisten sivuluokkien lukumäärä on $[G : H]$, ja todista nk. *Lagrangen lause*, jonka mukaan luku $|H|$ jakaa luvun $|G|$ ja $|G|/|H| = [G : H]$. Päätele tästä vielä, että jos $|H| = |G|/2$, niin H on normaali.

Ohje. Voit käyttää hyväksi viime harjoitusten tehtävässä 3 osoitettua tietoa, että kuvaus $\sigma_g : G \rightarrow G$, $\sigma_g(x) = gx$ on bijektio kaikilla $g \in G$. Päätele, että kyseinen kuvaus on myös bijektio $H \rightarrow gH$, ja muista, että aliryhmän sivuluokat muodostavat koko ryhmän osituksen.

4. Vähintään kaksialkioista ryhmää kutsutaan *yksinkertaiseksi*, jos sillä ei ole lainkaan epätriviaaleja normaaleja aliryhmiä. Osoita, että neljän alkion parillisten permutaatioiden ryhmä

$$A_4 = \{\sigma \in S_4 \mid \text{sign}(\sigma) = 1\}$$

ei ole yksinkertainen. (Itse asiassa A_n on yksinkertainen, jos ja vain jos $n = 3$ tai $n \geq 5$.)

5. Osoita, että ryhmä \mathbb{R}_a on vaihdannainen.
6. Luennolla käsitellyn 3-syklin avulla voidaan muodostaa muitakin ryhmän \mathbb{R}_p parillisia permutaatioita. Esitä seuraavat permutaatiot perussiirtojen ja niiden käänteissiirtojen tulona, kun palat on numeroitu luennolla esitetyssä järjestyksessä:

$$(a) \quad (368), \quad (b) \quad (16)(38), \quad (c) \quad (18)(36).$$