

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lisätehtäviä todistamisesta
Kevät 2011

Alla olevat tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Olkoon G ryhmä, jolla on alkio g . Osoita aliryhmän määritelmän perusteella, että joukko $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ on ryhmän G aliryhmä.
2. Olkoon R rengas, jossa ehto $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pätee kaikilla alkioilla a ja b . Osoita, että rengas on vaihdannainen.
3. Olkoon R vaihdannainen rengas, jossa on alkio a . Osoita, että renkaan R osajoukko $\{ra \mid r \in R\}$ on ideaali.
4. Olkoon $(G, +)$ ryhmä, jolla on neutraalialkio e . Osoita, että ryhmän G osajoukko $\{a \in G \mid 4a = e\}$ on aliryhmä.
5. Osoita, että vaihdannaisen ryhmän kaikki tekijäryhmät ovat vaihdannaisia.
6. Osoita, että renkaan \mathbb{Z}_n kaikki yhteenlaskualiryhmät ovat ideaaleja.
7. Olkoon G ryhmä, jolla on alkio g . Osoita, että kuvaus $f: G \rightarrow G$, $f(x) = xg$ on bijektio.