

Algebra I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kertaustehtäviä ensimmäiseen kurssikokeeseen

1. Määritellään kokonaislukujen laskutoimitus $*$ kaavalla

$$x * y = x + y + xy.$$

Osoita, että laskutoimitus $*$ on liitännäinen ja vaihdannainen ja että sillä on neutraalialkio.

2. Tutki, muodostaako pari $(\mathbb{Z}, *)$ ryhmän, kun laskutoimitus $*$ määritellään kuten edellisessä tehtävässä.

3. Määritellään rationaalilukujen laskutoimitus \diamond kaavalla

$$x \diamond y = 2xy.$$

Osoita, että pari $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \diamond)$ muodostaa ryhmän.

4. Olkoon $(G, +)$ Abelin ryhmä ja H niiden G :n alkioiden joukko, joille on voimassa

$$4x = x.$$

Osoita, että $(H, +)$ on ryhmän $(G, +)$ aliryhmä.

5. Ratkaise yhtälöt $a \circ x = b$ ja $y \circ a = b$ ryhmässä S_4 , kun

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Tutki, kuinka monta alkioita on joukossa $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$ jokaisella $\alpha \in \mathbb{Z}_5$.

7. Mitkä seuraavista ryhmistä ovat syklisiä?

- a) $\{(1), (1479), (1974), (17)(49)\} \leq S_9$
- b) $(\mathbb{Q}, +)$
- c) $\{[-20]_{12}, [24]_{12}, [8]_{12}\} \leq \mathbb{Z}_{12}$
- d) $\langle (13)(24), (12)(34) \rangle \leq S_4$

8. Olkoon G syklinen ryhmä, jonka kertaluku on 26. Määritä sen aliryhmät. Mitkä ovat niiden kertaluvut?