Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kertaustehtäviä toiseen kurssikokeeseen

Huomio. Kertaustehtävien edellisessä versiossa ensimmäisen tehtävän tehtävänanto oli virheellinen: kolmikko $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ei ole rengas kurssin määritelmän mukaan, sillä multiplikatiivinen neutraalialkio 1 ei kuulu joukkoon $2\mathbb{Z}$. Osassa kirjallisuudessa renkaan määritelmä ei vaadi multiplikatiivisen neutraalialkion kuulumista joukkoon, osassa tällaista rakennetta kutsutaan *pseudorenkaaksi.* Pahoittelut virheestä.

1. Määritellään kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$ laskutoimitukset $\oplus$ ja $\odot$ ehdoilla

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y - 1 \qquad \text{ja} \\ x \odot y &= x + y - xy. \end{aligned}$$

   Osoita, että kolmikko $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ on rengas. Onko se kokonaisalue? Entä kunta?

2. Osoita, että Gaussin kokonaislukujen rengas

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   on kompleksilukujen renkaan $\mathbb{C}$ alirengas.

3. Olkoon R rengas. Osoita, että joukko

$$C(R) = \{a \in R : ab = ba \text{ kaikilla } b \in R\}$$

   on renkaan R alirengas.

4. a) Osoita, että ryhmä $2\mathbb{Z}$ on ryhmän $\mathbb{Z}$ normaali aliryhmä.
   b) Etsi aliryhmän $2\mathbb{Z}$ sivuluokat ryhmässä $\mathbb{Z}$ ja muodosta tekijäryhmän $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ laskutaulu.
   c) Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$.

5. Etsi kaikki renkaan $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ automorfismit eli isomorfismit $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

6. Olkoon G ryhmä ja N ja M sen normaaleja aliryhmiä. Osoita, että myös $N \cap M$ on ryhmän G normaali aliryhmä.

7. Osoita, että tekijäryhmä $5\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}_4, +)$ kanssa.

8. Oletetaan, että D ja E ovat kokonaisalueita ja $f : D \to E$ rengashomomorfismi. Olkoon D:n karakteristika $n \neq 0$. Osoita, että D:llä ja E:llä on sama karakteristika.

9. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = x - iy$, on renkaan $\mathbb{C}$ automorfismi.

10. Tarkastellaan reaalialkioisten $n \times n$ -matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{n \times n}$. Kääntyvien matriisien joukko

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}$$

muodostaa ryhmän kertolaskun suhteen. Osoita, että joukko

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

on ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ normaali aliryhmä ja että

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vihje: Determinanttikuvaus $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ on surjektiivinen ryhmähomomorfismi. Käytä ryhmien homomorfialausetta.

11. Olkoon $G/N = \{A, B, C, D\}$ sellainen tekijäryhmä, että sille on voimassa

$$\begin{aligned} a &\in A, \\ b &\in B, \\ c &\in C \quad \text{ja} \\ e &\in D \end{aligned}$$

joillakin $a, b, c, e \in G$ (e on ryhmän G neutraalialkio) ja lisäksi $\{e, a, b, c\} \cong V_4$. Kirjoita ryhmän G/N laskutaulu.