

Algebra I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kertaustehtäviä

1. Olkoon $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on bijektio}\}$. Tiedämme, että G on ryhmä, kun laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen. Osoita, että

$$H = \{f \in G \mid f(1) = 1\}$$

on ryhmän G aliryhmä.

2. Määritellään rationaaliluvuille laskutoimitus $*$ seuraavasti:

$$x * y = 2xy.$$

(Yhtälön oikealla puolella oleva kertolasku on tavallinen rationaalilukujen kertolasku.) Osoita, että $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ on ryhmä.

3. a) Määritä ryhmän \mathbb{Z}_{16} aliryhmä $\langle [4]_{16} \rangle$.
b) Määritä ryhmän S_4 aliryhmä $\langle (1234), (13)(24) \rangle$.
5. a) Olkoot A ja B joukkoja. Osoita, että $A = A \cup (A \cap B)$.
b) Olkoon $f : X \rightarrow Y$ kuvaus ja $A \subset X$. Osoita, että $A \subset f^{-1}[f[A]]$.
c) Määritellään kokonaisluvuille relaatio

$$a \sim b \iff n \mid (a + b).$$

Onko relaatio refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen? Onko se ekvivalenssirelaatio?

6. Etsi ryhmän \mathbb{Z}_{16} aliryhmät. Mitkä ovat niiden kertaluvut? Entä indeksit?