Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Tehtäviä polynomeista
Kevät 2010

Tehtävä 1 tehtiin luennolla. Tehtävä 2 on hyödyllinen harjoitus polynomeista ja ideaaleista. Tehtävä 3 sopii niille, joita kiinnostaa tietää, miten polynomirenkaista voidaan muodostaa kuntia.

1. Määritä seuraavien polynomien juuret:

   a) $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$
   b) $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$
   c) $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

   Päättele kussakin tapauksessa, onko polynomi jaoton. Jos ei, ilmaise se kahden ensimmäisen asteen polynomin tulona.

2. Olkoon R vaihdannainen rengas. Tutkitaan joukkoa

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_i \in R,\ a_0 = 0,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   Miltä sen alkiot näyttävät? Osoita, että kyseessä on renkaan $R[X]$ ideaali.

3. Osoita, että polynomi $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ on jaoton. Millaisia ovat sen virittämän ideaalin $\langle f \rangle$ alkiot? Määritä tekijärenkaan $\mathbb{Z}_2[X]/\langle f \rangle$ alkiot ja tekijärenkaan laskutoimitustaulut. Totea, että kyseessä on kunta. Onko se isomorfinen jonkin tutun kunnan kanssa?

   Millaisen kunnan saat renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ polynomista $X^2 + 1$?