Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 9 (2 sivua)
28.3. – 1.4.2011

1. a) Osoita, että rengas $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ on kokonaisalue. Mikä on sen karakteristika? Onko kyseessä kunta?

   b) Ratkaise kokonaisalueessa D yhtälö $x^3 - x = 0$. Mitkä ovat ratkaisut, kun $D = \mathbb{Z}_2$ tai $D = \mathbb{Z}_3$? Yleistä sitten havaintosi mielivaltaiseen kokonaisalueeseen. Montako ratkaisua yhtälöllä on, kun kokonaisalueen D karakteristika on 2? Entä silloin, kun karakteristika on 3?

2. Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ on rengas, kun laskutoimitukset määritellään pisteittäin. Rengas $\mathbb{Z}_3$ on kokonaisalue ja vieläpä kunta. Onko $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ kokonaisalue? Entä kunta?

3. a) Oletetaan, että $n \in \mathbb{Z}$ ei ole alkuluku. Osoita, että $\mathbb{Z}_n$ ei ole kokonaisalue. (Ota mallia vaikkapa renkaasta $\mathbb{Z}_6$, joka ei ole kokonaisalue.)

   b) Olkoon p alkuluku. Osoita, että $\mathbb{Z}_p$ on kokonaisalue.

   Siten $\mathbb{Z}_n$ on kokonaisalue täsmälleen silloin, kun n on alkuluku.

4. Määritä kaikki ryhmän S_3 aliryhmät. Lagrangen lauseesta on apua.

5. Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä.

   a) Oletetaan, että $x, y \in G$. Osoita, että $x(Hy) = (xH)y$.

   b) Oletetaan, että $x \in G$ ja $h \in H$. Osoita, että $xhH = xH$.

6. Tarkastellaan ryhmän $\mathbb{Z}_9$ aliryhmää $N = \langle [3]_9 \rangle$. Kirjoita tekijäryhmän $\mathbb{Z}_9/N$ yhteenlaskutaulu. Järjestä ryhmän $\mathbb{Z}_9$ yhteenlaskutaulussa alkiot sivuluokkien mukaan. Miten taulussa näkyy tekijäryhmä $\mathbb{Z}_9/N$?

KÄÄNNÄ!

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuharjoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hieman muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

a) i) Osoita, että harjoituksen 8 tehtävässä 5 esiintynyt rengas $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ on kunta.

   ii) Olkoon D kokonaisalue ja olkoot $a, b, c \in D$. Oletetaan, että $a \neq 0$ ja $ab = ac$. Osoita, että $b = c$ (supistamissääntö).

b) i) Olkoon p alkuluku. Osoita, että renkaassa $\mathbb{Z}_p$ ainoastaan alkiot $[1]_p$ ja $[p-1]_p$ ovat itsensä käänteisalkioita.

   ii) Osoita edellisen kohdan avulla *Wilsonin lause*: kokonaisluku p on alkuluku jos ja vain jos

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$