Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 8 (2 sivua)
21.3. – 25.3.2011

1. Totea, että $H = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$ on ryhmän $\mathbb{Z}_{16}$ aliryhmä. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat.

   Piirrä kuva ryhmästä $\mathbb{Z}_{16}$ ja aliryhmästä H samaan tapaan kuin syklisiä ryhmiä käsittelevässä luvussa (luku 2.3). Miten sivuluokkia voi havainnollistaa kuvan avulla?

2. Tarkastellaan ryhmän S_3 aliryhmää $B = \{(1), (23)\}$. Yritetään määritellä joukossa S_3/B laskutoimitus $\boxdot$ samalla tavalla kuin harjoituksen 7 tehtävässä 5:

$$\sigma B \boxdot \tau B = (\sigma\tau)B,$$

   kun $\sigma B, \tau B \in S_3/B$.

   Osoita, että sivuluokan edustajan valinta vaikuttaa tulokseen, eikä laskutoimitusta voi määritellä yllä kuvatulla tavalla. (On siis osoitettava, että tulos $\sigma B \boxdot \tau B$ voi saada eri arvoja sen mukaan, millaiset edustajat σ ja τ sivuluokille on valittu.)

3. Mitkä seuraavista ovat renkaita? Jos kyseessä ei ole rengas, mitkä renkaan ehdoista toteutuvat ja mitkä eivät?

   a) $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$
   b) $(\mathbb{Q}^+, +, \cdot)$, missä $\mathbb{Q}^+ = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$
   c) polynomifunktioiden joukko varustettuna polynomien yhteen- ja kertolaskulla
   d) $(X, +, \cdot)$, missä $X = \{a + b\pi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$

4. Määritellään $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$. Osoita, että $(R, +, \cdot)$ on rengas. Onko R renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ alirengas? Mitkä renkaan R alkioista ovat yksiköitä?

5. Osoita, että joukko

$$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

   on renkaan $\mathbb{R}$ alirengas.

KÄÄNNÄ!

6. Olkoon G ryhmä, jonka kertaluku on pq, missä p ja q ovat alkulukuja. Osoita, että jokainen ryhmän G aito aliryhmä on syklinen. (Aliryhmä $H \leq G$ on aito, jos $H \neq G$.) Tiedetäänkö, että ryhmä G on syklinen? Tiedetäänkö, että se ei ole syklinen?

   Neuvo: Lue huolellisesti Lagrangen lausetta koskeva luku.

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuharjoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hieman muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

   a) i) Totea, että $H = \{[0]_{15}, [5]_{15}, [10]_{15}\}$ on ryhmän $\mathbb{Z}_{15}$ aliryhmä. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat. Havainnollista sivuluokkia kuvan avulla.

   ii) Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitukset $\oplus$ ja $\odot$ seuraavasti:

   $$n \oplus m = n + m - 1 \quad \text{ja} \quad n \odot m = n + m - nm.$$

   Osoita, että $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ on rengas.

   b) Oletetaan, että R on rengas, jossa pätee $r^2 = r$ kaikilla $r \in R$.

   i) Osoita, että $r = -r$ kaikilla $r \in R$. (Vihje: Tutki alkiota $(r + r)^2$.)

   ii) Osoita, että R on vaihdannainen eli että $rs = sr$ kaikilla $r, s \in R$.