

Algebra I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Harjoitus 7 (2 sivua)

14.3. – 18.3.2011

1. Määritellään reaalilukuparien relaatio \sim seuraavasti:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x = kx' \text{ ja } y = ky' \text{ jollakin } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Toisin sanoen kyseessä on reaalitason vektoreiden relaatio

$$\bar{v} \sim \bar{w} \iff \bar{v} = k\bar{w} \text{ jollakin } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio. Mitkä ovat sen ekvivalenssiluokat?

2. a) Määritä aliryhmän $A = \{(1), (123), (132)\}$ oikeat sivuluokat ryhmässä S_3 .
Ovatko ne samat kuin vasemmat sivuluokat?
b) Määritä aliryhmän $B = \{(1), (23)\}$ vasemmat ja oikeat sivuluokat ryhmässä S_3 . Ovatko ne samat?

3. Totea, että $20\mathbb{Z}$ on ryhmän $(4\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä. Määritä aliryhmän $20\mathbb{Z}$ vasemmat sivuluokat. Ovatko sivuluokat $36 + 20\mathbb{Z}$ ja $52 + 20\mathbb{Z}$ samat?

4. Oletetaan, että G on ryhmä ja H sen aliryhmä. Olkoot $a, b \in G$. Osoita, että

- a) $aH = H$ jos ja vain jos $a \in H$
b) $a \in bH$ jos ja vain jos $aH = bH$.

5. Tutkitaan ryhmän S_3 aliryhmää $A = \{(1), (123), (132)\}$ ja määritellään sen vasempien sivuluokkien joukossa S_3/A laskutoimitus \square seuraavalla tavalla. Jos $gA, hA \in S_3/A$, niin

$$gA \square hA = (gh)A.$$

Määritä parin $(S_3/A, \square)$ laskutoimitustaulu.

Ryhmää S_3 voidaan ajatella kolmion symmetriaryhmänä. Osaatko havainnollistaa sivuluokkia ja niiden laskutoimitusta kiertojen ja peilausten avulla?

Huomio: Koska sivuluokat voidaan kirjoittaa monessa eri muodossa edustajien avulla, pitäisi ensin varmistaa, että laskutoimitus voidaan todellakin määrittellä yllä esitetyllä tavalla. Asiaan palataan myöhemmin ja toistaiseksi voit olettaa, että määrittäminen onnistuu.

KÄÄNNÄ!

6. Tiedetään, että kaikki syklisen ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmät ovat syklisiä. Olkoot n ja m kokonaislukuja. Osoita, että ryhmän $\langle n, m \rangle$ virittäjä on $\text{sy}(n, m)$. Perustele vastauksesi huolellisesti.

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuharjoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hieman muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

- a) i) Osoita, että kongruenssi modulo n on ekvivalenssirelaatio.
ii) Määritä ryhmässä $3\mathbb{Z}$ aliryhmän $18\mathbb{Z}$ vasemmat sivuluokat.
- b) Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K . Oletetaan, että $aH = bK$ joillakin $a, b \in G$. Osoita, että $H = K$. Jos kahdella aliryhmällä on sama sivuluokka, ovat aliryhmät siis samat.