Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 6 (2 sivua)
21.–25.2.2011

1. a) Määritä seuraavat summat:

$$[2]_4 + [3]_4, \quad [2]_5 + [3]_5, \quad [2]_6 + [2]_6 + [2]_6, \quad 7 \cdot [3]_4.$$

   b) Osoita, että joukko $\{[2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ on suljettu kertolaskun suhteen.

2. Toisinaan laskutoimitus yritetään määritellä kaavalla, jossa tulos muuttuu sen mukaan, missä muodossa alkiot kirjoitetaan. Tämä ei tietenkään käy päinsä. Alla on yritetty määritellä erilaisia laskutoimituksia. Selvitä, käyvätkö ehdot todellakin laskutoimituksen määritelmiksi.

   a) joukon $\mathbb{Q}$ laskutoimitus $(a/b) * (c/d) = a + b$
   b) joukon $\mathbb{Z}_5$ laskutoimitus $[a]_5 * [b]_5 = [|a| + |b|]_5$
   c) joukon $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ laskutoimitus $(a/b) * (c/d) = (ad)/(bc)$

3. Määritä ryhmän $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ aliryhmät.

4. a) Tarkastellaan ryhmän S_6 aliryhmää $\langle\, (14)(263)\, \rangle$. Määritä sen kaikki aliryhmät.

   b) Tarkastellaan ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmää $H = \{4^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Mitkä ovat ryhmän H aliryhmät?

5. a) Laske $\mathrm{syt}(510, 115)$.

   b) Etsi luvut $x, y \in \mathbb{Z}$, joille pätee $510x + 115y = \mathrm{syt}(510, 115)$.

   c) Määritä ryhmässä $\mathbb{Z}_{510}$ alkion $[115]_{510}$ kertaluku. Onko alkio ryhmän virittäjä?

6. a) Osoita, että $2900 \equiv 2 \pmod 9$.

   b) Mikä on jakojäännös, kun $3^{2011} - 7^{2011}$ jaetaan luvulla 8?

   c) Minä viikonpäivänä ystävänpäivä on vuonna 2012?

KÄÄNNÄ!

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuharjoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hieman muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

a) i) Määritä ryhmien $\mathbb{Z}_{30}$ ja $\langle\, (12345678)\, \rangle$ aliryhmät.

ii) Laske $\mathrm{syt}(561, 455)$. Olkoon G syklinen ryhmä, jonka virittää alkio g. Oletetaan, että ryhmän G kertaluku on 561. Määritä alkion g^{455} kertaluku. Virittääkö alkio ryhmän G?

b) i) Osoita todeksi niin kutsuttu fuksin unelma: jos p on alkuluku, niin $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}$.

ii) Osoita, että $n^5 - n \equiv 0 \pmod 3$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.