

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 5 (2 sivua)
14.2.–18.2.2011

1. Määritellään kuvaus

$$f: S_3 \rightarrow S_3, \quad f(\alpha) = (123) \cdot \alpha.$$

Osoita, että f on bijektio. Mikä on sen käänteiskuvauksen lauseke?

Mikä on joukon $\{(13), (12)\}$ kuva kuvauksessa f ? Entä joukon $\{(1), (132), (23)\}$ alkukuva?

2. a) Määritä ryhmän S_6 aliryhmä $\langle (1563)(24) \rangle$. Mikä on alkion $(1563)(24)$ kertaluku?
b) Millä ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ alkioista on äärellinen kertaluku?
c) Tutkitaan ryhmää $G = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on bijektio}\}$, jonka laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen. Määritellään

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 3x.$$

Määritä ryhmän G aliryhmä $\langle g \rangle$. Mikä on alkion g kertaluku?

3. a) Määritä ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä $\langle 8, 12 \rangle$.
b) Määritä ryhmän S_4 aliryhmä $\langle (13)(24), (12)(34) \rangle$.
4. Harjoituksen 4 tehtävässä 4 löydettiin ryhmän S_4 aliryhmä, jonka kertaluku on neljä. Etsi sellainen neljän alkion aliryhmä, jonka kertotaulu on erilainen.
5. Oletetaan, että G on ryhmä ja sen alkion g kertaluku on 6. Mitkä ovat alkioiden g^2 , g^4 ja g^5 kertaluvut?

KÄÄNNÄ!

6. a) Olkoon G ryhmä ja $g \in G$. Osoita, että $\langle g \rangle = \langle g^{-1} \rangle$. Totea, että alkioiden g ja g^{-1} kertaluvut ovat samat.
- b) Olkoon G ryhmä ja $g, x \in G$. Jos alkion g kertaluku on n , niin mikä on alkion xgx^{-1} kertaluku?

Perustele vastauksesi huolellisesti hyvällä suomen kielellä.

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuharjoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hie­man muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

- a) Määritä ryhmän $(\mathbb{Q}, +)$ aliryhmä $\langle 7 \rangle$ ja ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä $\langle 3, 12 \rangle$. Miltä näyttää ryhmän S_6 aliryhmä $\langle (145)(362) \rangle$? Mitkä ovat alkioiden 7 ja $(145)(362)$ kertaluvut?
- b) i) Oletetaan, että ryhmässä G kaikkien neutraalialkiosta poikkeavien alkioiden kertaluku on 2. Osoita, että G on vaihdannainen.
- ii) Oletetaan, että ryhmässä G vain yhden alkion g kertaluku on kaksi. Osoita, että $xg = gx$ kaikilla $x \in G$.