Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 4 (2 sivua)
7.–10.2.2011

1. Määritellään joukolle $K_{12} = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ kellotaulusumma 🕒 seuraavalla tavalla: jos $n, m \in K_{12}$, niin $n$ 🕒 $m$ on se kellonaika, joka saadaan, kun kellonaikaan $n$ lisätään $m$ tuntia. Esimerkiksi $11$ 🕒 $5 = 4$. Määritä seuraavat summat:

   | | |
   |---|---|
   | a) 2 🕒 9 | b) 10 🕒 6 |
   | c) 3 🕒 12 | d) 8 🕒 4. |

   Mikä on laskutoimituksen neutraalialkio? Entä alkioiden vasta-alkiot?

   Kuvitellaan sitten kellotaulu, jossa on 13 tuntia. Nyt siis tarkastellaan joukkoa $K_{13} = \{1, 2, 3, \ldots, 13\}$. Mitä saat tällä kertaa tulokseksi yllä olevista laskuista? Mikä on neutraalialkio ja mitkä ovat alkoiden vasta-alkiot?

2. Määritellään

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Laske tulot $\sigma\tau$ ja $\tau\sigma$. Esitä permutaatiot $\sigma$, $\tau$, $\sigma\tau$ ja $\tau\sigma$ erillisten syklien tulona.

3. Tutkitaan ryhmän $S_5$ alkioita $\alpha = (1534)$ ja $\beta = (134)(25)$.

   a) Määritä alkiot $\alpha^{-1}$ ja $\beta^{-1}$.

   b) Ratkaise ryhmässä $S_5$ yhtälöt $\alpha x = \beta$ ja $x\alpha = \beta$.

4. Osoita, että joukko $V = \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$ on ryhmän $S_4$ aliryhmä. (Tätä varten kannattaa kirjoittaa joukon $V$ kertotaulu.) Kumpaa luvussa 1.3.4 esitettyä neljän alkion ryhmää $V$ vastaa?

5. Olkoon $G$ ryhmä. Osoita, että joukko

$$H = \{g \in G \mid xg = gx \text{ kaikilla } x \in G\}$$

   on ryhmän $G$ vaihdannainen aliryhmä.

KÄÄNNÄ!

6. Tutkitaan korttipakka, jossa on kymmenen korttia. Alla on kuvailtu kaksi korttipakan sekoitustapaa. Kirjoita kummassakin tapauksessa sekoitusta vastaava permutaatio. Selvitä, kuinka monen sekoituskerran jälkeen ollaan takaisin lähtötilanteessa.

   a) Otetaan pakan päältä neljän kortin pino ja laitetaan se pakan alle.
   b) Jaetaan pakka kahteen yhtä suureen osaan ja asetetaan näiden kahden osan kortit vuorotellen toistensa lomaan. Jos korttien alkuperäinen järjestys oli $1, 2, 3, \dots, 10$, niin uusi järjestys on 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10.

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuhajoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä eikä niistä tule malliratkaisuja. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hieman muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

   a) Osoita, että joukko $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ on ryhmän $S_4$ aliryhmä. Vertaa sitä luvussa 1.3.4 esitettyihin kertotauluihin.
   b) Aivojenvaihtokoneella voi vaihtaa kahden henkilön aivot. On kuitenkin niin, että jos aivot on vaihdettu kahden henkilön välillä, nuo samat kaksi henkilöä eivät voi vaihtaa aivoja enää uudestaan.

      i) Oletetaan, että kolme henkilöä on vaihdellut aivoja keskenään niin, että ensimmäisen aivot ovat toisella, toisen aivot kolmannella ja kolmannen aivot ensimmäisellä. Osoita, että jos avuksi saadaan kaksi uutta henkilöä, niin vaihtelemalla aivoja heidän kanssaan kaikki voivat saada omat aivonsa takaisin.
      ii) Oletetaan sitten, että $k$ kappaletta henkilöitä on vaihdellut aivojaan niin, että ensimmäisen aivot ovat toisella, toisen aivot kolmannella ja niin edelleen. Viimeisen henkilön aivot ovat ensimmäisellä henkilöllä. Aivojen permutaatio on siis sykli, jonka pituus on $k$. Osoita, että jos avuksi otetaan kaksi ulkopuolista henkilöä, niin kaikki aivot voidaan palauttaa oikealle omistajalleen.
      iii) Osoita, että olivatpa aivot vaihtuneet miten tahansa, niin kahden ulkopuolisen avustajan avulla ne voidaan aina palauttaa oikeille omistajilleen.

   (Ongelma on otettu TV-sarjan Futuraman tuotantokauden 6 jaksosta 10 ”The prisoner of Benda”.)