Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 3 (2 sivua)
31.1.–4.2.2011

1. Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus $n * m = n + m + 5$. Osoita, että $(\mathbb{Z}, *)$ on ryhmä. Olkoon O parittomien kokonaislukujen joukko. Osoita, että $(O, *)$ on ryhmän $(\mathbb{Z}, *)$ aliryhmä.

2. Olkoon $G = \{E, O\}$, missä E on parillisten kokonaislukujen joukko, ja O on parittomien kokonaislukujen joukko. Joukolle G voidaan määritellä laskutoimitus $\boxplus$ seuraavasti:

   Oletetaan, että $X, Y \in G$. Valitaan jotkin alkiot $x \in X$ ja $y \in Y$. Nyt $X \boxplus Y$ on se joukko, johon summa $x + y$ kuuluu. (Tässä kyse on tavallisesta kokonaislukujen yhteenlaskusta.)

   Kirjoita laskutoimituksen $\boxplus$ laskutoimitustaulu ja osoita, että $(G, \boxplus)$ on ryhmä.

   Huomio: Ei ole itsestään selvää, että laskutoimitus $\boxplus$ voidaan määritellän niin kuin se on määritelty. Asiaa käsitellään lisää myöhemmin.

3. Olkoon G ryhmä. Osoita, että karteesinen tulo $G \times G$ on ryhmä, kun laskutoimitus määritellään seuraavasti:

   $$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

   (Sanotaan, että karteesisen tulon laskutomitus on tällöin määritelty *komponenteittain* tai *pisteittäin.*)

   Olkoon H ryhmän G aliryhmä. Näytä, että $H \times H$ on ryhmän $G \times G$ aliryhmä.

4. Määritellään

   $$f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = 2011n$$

   ja

   $$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|.$$

   Ovatko kuvaukset f ja g injektioita, surjektioita tai bijektioita?

   Olkoot $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $B = \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$. Määritä $f[A]$, $f^{\leftarrow}[B]$, $g[B]$ ja $g^{\leftarrow}[A]$.

5. Todista seuraavat väitteet huolellisesti ja hyvällä suomen kielellä. Implikaatio- ja ekvivalenssinuolten käyttö on kiellettyä. Muista, että kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi todistamalla, että ne ovat toistensa osajoukkoja.

   Oletetaan, että $f : A \to B$ on kuvaus ja $C, D \subset B$. Osoita, että

   a) $f[f^{\leftarrow}[D]] \subset D$
   b) $f^{\leftarrow}[C \cup D] = f^{\leftarrow}[C] \cup f^{\leftarrow}[D]$.

6. Määritellään
$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad f(n) = (-1)^n.$$
   Määritä $\operatorname{Im} f$ ja $f^{\leftarrow}[\{1\}]$. Onko $\operatorname{Im} f$ ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä? Onko $f^{\leftarrow}[\{1\}]$ ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä?

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuhajoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä eikä niistä tule malliratkaisuja. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hieman muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

   a) Osoita, että joukko
$$4\mathbb{Z} = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
   on ryhmä, kun laskutoimituksena on kokonaislukujen yhteenlasku. Osoita, että
$$8\mathbb{Z} = \{8n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
   on ryhmän $4\mathbb{Z}$ aliryhmä, kun laskutoimituksen on edelleen yhteenlasku.

   b) Tiedämme, että kahden aliryhmän leikkaus on aina aliryhmä. Milloin kahden aliryhmän yhdiste on aliryhmä?