

Algebra I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Harjoitus 2 (2 sivua)

24.1. – 28.1.2011

1. a) Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus  $x * y = x + y + 5$ . Onko laskutoimitus liitännäinen? Entä vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkiota?
- b) Määritellään luonnollisille luvuille laskutoimitus  $x * y = x + y + 5$ . Onko laskutoimitus liitännäinen? Entä vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkiota?
2. a) Tutkitaan joukon  $\{a, b, c, d\}$  laskutoimitusta, joka on määritelty seuraavalla laskutoimitustaululla:

o	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

Onko laskutoimituksella neutraalialkiota? Onko alkioilla käänteisalkioita? Onko laskutoimitus vaihdannainen? Mitä huomaat alkioiden esiintymisestä taulukon sarakkeilla ja riveillä?

- b) Tutkitaan sitten joukon  $\{X, Y, Z\}$  laskutoimitusta, joka on määritelty laskutoimitustaululla

·	X	Y	Z
X	X	Y	Z
Y	Z	X	Y
Z	Z	Y	X

Tarkastele sitä samaan tapaan kuin kohdan a) laskutoimitusta. Tutki myös liitännäisyyttä.

3. Olkoot  $A$ ,  $B$  ja  $C$  joukkoja. Todista seuraavat väittämät. Kirjoita todistukset tarkasti, huolellisesti ja hyvällä matemaattisella tyyllillä.
  - a)  $A \subset A \cup B$
  - b)  $A \cap B = B \cap A$
  - c) jos  $A \subset B$ , niin  $A \cup B = B$
  - d) jos  $A \subset B$  ja  $A \not\subset C$ , niin  $B \not\subset C$
  - e)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. Joukon  $A$  potenssijoukko  $\mathcal{P}(A)$  koostuu kaikista  $A$ :n osajoukoista. Osoita, että  $\cap$  on potenssijoukon  $\mathcal{P}(A)$  laskutoimitus. Onko  $\cap$  liitännäinen? Entä vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkiota?

5. Mitkä seuraavista väittämistä ovat totta?

- a)  $1 \in \{1, 2, 3\}$       b)  $1 \subset \{1, 2, 3\}$       c)  $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$   
c)  $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$       g)  $\{1\} \in \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$       h)  $\{1\} \subset \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$   
h)  $2 \in \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$       d)  $\emptyset \in \mathbb{N}$       f)  $\{\emptyset\} \subset \mathbb{N}$

6. Olkoon  $*$  joukon  $S$  liitännäinen laskutoimitus. Oletetaan, että  $S$ :n alkioilla  $x$  ja  $y$  on käänteisalkiot. Onko alkioilla  $x * y$  käänteisalkiota? Jos on, niin mikä se on?

7\*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuhajoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hieman muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

- a) Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus  $x * y = x + y - xy$ . Onko laskutoimitus liitännäinen? Entä vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkiota? Mitä tapahtuu, jos laskutoimitus yritetään määritellä vain luonnollisille luvuille?
- b) Määritellään matriiseille laskutoimitus  $*$  seuraavalla tavalla: Jos  $A$  ja  $B$  ovat  $n \times n$ -matriiseja, niin  $A * B = AB - BA$ . (Tässä yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella olevat kerto- ja yhteenlasku ovat matriisien tavallisia laskutoimituksia.) Näytä, että  $A * A = 0$  ja  $A * B = -B * A$  kaikilla matriiseilla  $A$  ja  $B$ . Osoita, että laskutoimitus ei ole liitännäinen, kun  $n \geq 2$ .