

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 12 (2 sivua)
18.4. – 29.4.2011

1. a) Olkoon $f: G \rightarrow H$ ryhmähomomorfismi. Osoita, että jos G on vaihdannainen ryhmä, myös kuva $\text{Im } f$ on vaihdannainen ryhmä.
b) Ovatko ryhmät \mathbb{Z}_6 ja S_3 isomorfiset?
2. a) Osoita, että kuvaus $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a, b) = b$ on ryhmähomomorfismi.
b) Näytä homomorfialauseen avulla, että

$$\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \times \{0\}} \cong \mathbb{Z}.$$

3. Harjoituksen 10 tehtävässä 2 huomattiin, että ryhmillä $7\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ ja \mathbb{Z}_6 on samantyyppiset yhteenlaskutaulut. Osoita homomorfialauseen avulla, että ryhmät ovat isomorfiset. Mikä niiden välillä oleva isomorfismi on?

Jos haluat tähän tehtävään lisävihjeen, katso seuraavalle sivulle.

4. Mitkä rengashomomorfismin ehdoista seuraavat kuvaukset toteuttaavat? Mitkä niistä ovat rengashomomorfismeja?
 - a) $f: (\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$, $f(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$
 - b) $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$, $g(a, b) = (a, [b]_n)$.
 - c) $h: (\mathbb{Q}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$, $h(x) = x^2$.

Tässä $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ja $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.
 - a) Renkaan ideaali on aina myös alirengas
 - b) Jäännösluokkarengas \mathbb{Z}_n on isomorfinen tekijärenkaan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kanssa.
 - c) Jos rengas on kokonaisalue, sen jokainen tekijärenkas on myös kokonaisalue.
 - d) Olkoon R rengas ja I sen aito ideaali. Jos R on kunta, tekijärenkas R/I on kokonaisalue.

KÄÄNNÄ!

6. a) Anna esimerkki kahdesta renkaan \mathbb{Z}_3 eri polynomista, joita vastaa sama polynomikuvaus.
- b) Määritä renkaan \mathbb{Z}_5 polynomien $f = X^3 + 4X - 1$ ja $g = X^2 - 3X + 3$ juuret.
- c) Osoita, että edellisessä kohdassa polynomi g jakaa polynomia f .

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuharjoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaippaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hie­man muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

- a) i) Määritä kaikki renkaan \mathbb{Z}_8 ideaalit ja niitä vastaavat tekijärenkaat. Tutki tekijärenkaiden laskutoimitustauluja ja mieti, minkä tuttujen renkaiden kanssa ne ovat isomorfsia.
- ii) Olkoon R rengas, jolla on ideaali I . Osoita, että kuvaus $\pi: R \rightarrow R/I$, $\pi(r) = r + I$ on rengashomomorfismi.
- b) Oletetaan, että $\text{sy}(n, m) = 1$. Osoita, että ryhmät \mathbb{Z}_{nm} ja $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ovat isomorfiset. Muista ryhmien homomorfialause.

Vihje tehtävään 3: Käytä kuvausta $f: 7\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $f(a) = [\frac{1}{7}a]_6$.