Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 11 (2 sivua)
11.4.–15.4.2011

1. Alla on annettu joukot R ja I. Missä tapauksissa joukko I on renkaan R ideaali?

   a) $R = \mathbb{Q}$, $I = \mathbb{Z}$
   b) $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $I = \{4a + b\sqrt{8} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
   c) $R = \mathbb{Z}$, $I = \mathbb{Z}_6$

2. Mitkä seuraavista kuvauksista ovat ryhmähomomorfismeja? Jos kuvaus on ryhmähomomorfismi, määritä sen kuva ja ydin. Kerro näiden tietojen perusteella, onko kyseessä ryhmäisomorfismi.

   a) $f\colon S_3 \to S_3$, $f(\sigma) = (123)\sigma(132)$
   b) $f\colon (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $f(x) = 3x$
   c) $f\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $f(n) = (-1)^n$

3. Alla on yritetty määritellä kuvauksia. Missä tapauksissa määritteleminen onnistuu?

   a) $f\colon \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, $f(\frac{a}{b}) = a + b$, missä $a, b \in \mathbb{Z}$
   b) $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_5$, $f([a]_3) = [a]_5$
   c) $f\colon 4\mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$, $f(a + 20\mathbb{Z}) = [\frac{1}{4}a]_5$

   Jos kuvaus voidaan määritellä, tutki, onko se ryhmähomomorfismi.

4. Määritellään $A = \{(1), (123), (132)\} \leq S_3$ ja $N = \{[0]_4, [2]_4\} \leq \mathbb{Z}_4$. Mitä Lagrangen lause kertoo tekijäryhmän $(S_3 \times \mathbb{Z}_4)/(A \times N)$ alkioiden lukumäärästä? Määritä tekijäryhmän alkiot ja kertotaulu.

5. Oletetaan, että $f\colon G \to H$ on ryhmähomomorfismi. Tutkitaan normaalia aliryhmää $N = \operatorname{Ker} f$ ja sen sivuluokkia. Osoita, että samassa sivuluokassa olevilla alkioilla on sama kuva kuvauksessa f. Toisin sanoen, jos $aN = bN$, niin $f(a) = f(b)$. Ytimen sivuluokat siis määräävät funktion arvot.

KÄÄNNÄ!

6. Määritellään joukon $\mathbb{Z}$ laskutoimitus $*$ kuten harjoituksen 2 tehtävässä 1:

$$n * m = n + m + 5 \quad \text{kaikilla } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Osoita, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(\mathbb{Z}, *)$ ovat isomorfiset.

Vihje: Mille alkiolle luku 0 kuvautuu?

7*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuharjoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertaa harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hieman muita tehtäviä haastavampi tehtävä.

a) i) Määritellään $f\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $f(x) = x^2$. Osoita, että f on ryhmähomomorfismi. Määritä sen kuva ja ydin.

ii) Osoita, että kahden ryhmäisomorfismin yhdistetty kuvaus on ryhmäisomorfismi.

b) Osoita, että 2×2-matriisien renkaalla on vain triviaalit ideaalit. Onko kyseinen rengas kunta? Miksei tulos ole ristiriidassa luentomateriaalin lauseen 4.3.11 kanssa?