

1. Mitkä seuraavista yhtälöistä pätevät mielivaltaisen renkaan alkioille  $a$  ja  $b$ ?
  - a)  $a^2 - ba = (a - b)a$
  - b)  $(a + b + 1)(a - b) = a^2 - b^2 + a - b$
  - c)  $2a \cdot 4b - ab = 7ab$
  
2. Totea, että  $42\mathbb{Z}$  on ryhmän  $7\mathbb{Z}$  normaali aliryhmä. Määritä sitten tekijäryhmän  $7\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$  alkiot ja yhteenlaskutaulu. Vertaa yhteenlaskutaulua ryhmän  $\mathbb{Z}_6$  yhteenlaskutauluun.
  
3. a) Olkoon  $G$  ryhmä ja  $N$  sen normaali aliryhmä. Osoita, että tekijäryhmän  $G/N$  alkioille  $gN$  pätee  $(gN)^k = g^kN$  kaikilla  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 b) Tarkastellaan ryhmän  $(\mathbb{Z}_{20}, +)$  aliryhmää  $N = \langle [4]_{20} \rangle$ . Mikä on tekijäryhmän  $\mathbb{Z}_{20}/N$  kertaluku? Mitkä ovat alkioiden  $[1]_{20} + N$ ,  $[2]_{20} + N$  ja  $[3]_{20} + N$  kertaluvut? Käytä hyväksesi a)-kohtaa.
  
4. Ovatko seuraavat aliryhmät normaaleja? Jos aliryhmä on normaali, määritä vastaava tekijäryhmä ja sen kertotaulu.
  - a) Ryhmän  $S_{24}$  aliryhmä  $\{(1), (123), (132)\}$ .
  - b) Ryhmän  $\mathbb{H} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$  aliryhmä  $\{1, -1\}$ . Ryhmän  $\mathbb{H}$  kertotaulu on annettu alla.

	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
1	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
-1	-1	1	$-i$	$i$	$-j$	$j$	$-k$	$k$
$i$	$i$	$-i$	-1	1	$k$	$-k$	$-j$	$j$
$-i$	$-i$	$i$	1	-1	$-k$	$k$	$j$	$-j$
$j$	$j$	$-j$	$-k$	$k$	-1	1	$i$	$-i$
$-j$	$-j$	$j$	$k$	$-k$	1	-1	$-i$	$i$
$k$	$k$	$-k$	$j$	$-j$	$-i$	$i$	-1	1
$-k$	$-k$	$k$	$-j$	$j$	$i$	$-i$	1	-1

5. Osoita, että syklisten ryhmien tekijäryhmät ovat syklisiä.
6. a) Osoita, että joukko  $I = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}$  on renkaan  $\mathbb{Z}_{12}$  ideaali.  
 b) Määritä tekijärenkaan  $\mathbb{Z}_{12}/I$  laskutoimitustaulut.
- 7\*. Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, joita ei käsitellä laskuharjoituksissa. Tehtävistä ei myöskään saa lisäpisteitä. Tehtävä a) kertoo harjoitusten ydinasioita, ja sen voi tehdä, jos kaipaa lisäharjoitusta perustehtävistä. Tehtävä b) on hie-  
 man muita tehtäviä haastavampi tehtävä.
- a) i) Osoita, että vaihdannaisen ryhmän kaikki tekijäryhmät ovat vaihdannaisia.  
 ii) Merkitään  $G = \{(1), (12), (34), (12)(34)\} \subset S_4$ . Tiedetään, että  $G$  on ryhmä. Osoita, että sen aliryhmä  $N = \{(1), (12)\}$  on normaali. Kirjoita tekijäryhmän  $G/N$  kertotaulu. Vertaa tekijäryhmän kertotaulua ryhmän  $G$  kertotauluun samalla tavalla kuin luentomateriaalin esimerkissä.  
 Onko aliryhmä  $N$  normaali ryhmässä  $S_4$ ?
- b) Olkoon  $G$  ryhmä, jolla on normaali aliryhmä  $N$ . Oletetaan lisäksi, että  $[G : N] = k$ . Osoita, että  $g^k \in N$  kaikilla  $g \in G$ .  
 Neuvo: Muista Lagrangen lauseen seuraukset.