

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 1 (2 sivua)
17.– 21.1.2011

Algebrassa tutkitaan erilaisia laskutoimituksia. Tuttuja esimerkkejä laskutoimituksista ovat esimerkiksi kokonaislukujen yhteen- ja kertolasku. Näissä lasku-
harjoituksissa tutustutaan hieman erikoisempiin laskutoimituksiin.

1. Tutkitaan origosta lähteviä puolisuoria, jotka ovat positiivisen x -akselin ja positiivisen y -akselin välissä. Määritellään näille puolisuorille laskutoimitus $*$ seuraavasti. Jos r ja s ovat joukon S puolisuoria, niin $r * s$ on näiden välisen kulman puolittaja eli se r :n ja s :n välissä oleva puolisuora, joka on täsmälleen yhtä kaukana niistä molemmista.

Olkoon puolisuora r positiivinen x -akseli ja puolisuora s positiivinen y -akseli. Määritä puolisuorat $r * s$ ja $s * r$. Merkitään $t = r * s$. Millaisia puolisuoria ovat $(r * s) * t$ ja $r * (s * t)$?

Onko olemassa sellaista puolisuoraa e , että $e * a = a$ ja $a * e = a$ kaikilla puolisuorilla a ?

Millä tavoin kuvailtu laskutoimitus eroaa esimerkiksi kokonaislukujen yhteen- tai kertolaskusta?

2. Alla olevissa taulukossa on määritelty hedelmien laskutoimitus \circ . Kutsutaan tätä laskutoimitusta hedelmäkertolaskuksi.

\circ	omena	banaani	päärynä
omena	omena	banaani	päärynä
banaani	banaani	päärynä	omena
päärynä	päärynä	omena	banaani

Määritä seuraavat hedelmät:

- a) päärynä \circ banaani
- b) banaani \circ banaani
- c) päärynä \circ omena.

Onko olemassa sellaista hedelmää, että sillä kertominen ei vaikuta mitenkään? (Tällainen hedelmä vertautuu esimerkiksi rationaalilukujen kertolaskussa lukuun 1.) Löydätkö kertotaulusta jotakin, joka muistuttaa rationaalilukujen käänteislukuja?

Voiko kertomisjärjestyistä vaihtaa eli päteekö $x \circ y = y \circ x$ kaikilla hedelmillä x ja y ? Onko kertolaskussa sulkujen paikalla väliä?

3. Määritellään vielä joukon $\{a, b, c\}$ laskutoimitus \boxplus seuraavan taulukon avulla:

\boxplus	a	b	c
a	c	b	a
b	a	c	b
c	a	b	c

Tutki sitä samaan tapaan kuin tehtävän 2 hedelmäkertolaskua.

4. Tutuille lukujoukoille voidaan keksiä myös uusia laskutoimituksia. Esimerkiksi kokonaisluvuille voidaan määritellä laskutoimitus \oplus seuraavalla tavalla:

$$n \oplus m = n + m + nm \quad \text{kaikilla } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Yhtälön oikealla puolella olevat laskutoimitukset ovat kokonaislukujen tavalliset yhteen- ja kertolasku. (Tätä laskutoimitusta tullaan käsittelemään tarkemmin luennoilla.) Kehitä jollekin lukujoukolle uusi laskutoimitus ja tutki sen ominaisuuksia.