Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Haastavampia tehtäviä
Kevät 2010

1. Oletetaan, että G on ryhmä ja H ja K sen aliryhmiä. Milloin $H \cup K$ on G:n aliryhmä?

2. Määritellään
$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma\text{:n merkki on } 1\}.$$
Osoita, että A_n on ryhmän S_n aliryhmä. Määritä A_3 ja A_4. Mitä huomaat niiden kertaluvuista?

3. a) Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että G:ssä kaikkien neutraalialkiosta poikkeavien alkioiden kertaluku on 2. Osoita, että G on vaihdannainen.
   b) Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että G:ssä vain yhden alkion g kertaluku on kaksi. Osoita, että $xg = gx$ kaikilla $x \in G$.

4. a) Jos p on alkuluku, niin $(a + b)^p = a^p + b^p \pmod p$. (Niin kutsuttu fuksin unelma.)
   b) Osoita, että $n^5 - n \equiv 0 \pmod 3$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

5. Oletetaan, että R on rengas, jossa pätee $r^2 = r$ kaikilla $r \in R$.
   a) Osoita, että $r = -r$ kaikilla $r \in R$. (Vihje: Tutki alkiota $(r + r)^2$.)
   b) Osoita, että R on vaihdannainen eli että $rs = sr$ kaikilla $r, s \in R$.

6. Oletetaan, että R on rengas. Alkio $a \in R \setminus \{0\}$ on *nollanjakaja*, jos on olemassa $b \in R \setminus \{0\}$, jolle pätee $ab = 0$. Alkio $a \in R$ on *nilpotentti*, jos on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku, että $a^n = 0$.
   a) Osoita, että vaihdannaisessa renkaassa nollanjakajilla ei ole käänteisalkioita kertolaskun suhteen.
   b) Osoita, että jos alkio a on nilpotentti, niin alkiolla $a + 1$ on käänteisalkio kertolaskun suhteen.

7. a) Olkoon G ryhmä, $H \leq G$ ja $N \trianglelefteq G$. Osoita, että $HN \leq G$.
   b) Jos g ja h ovat ryhmän G alkioita, niin niiden *kommutaattoriksi* kutsutaan alkiota $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Osoita, että kommutaattorien virittämä aliryhmä $G' = \langle [g, h] \mid g, h \in G\rangle$ on normaali. Osoita, että G/G' on vaihdannainen ryhmä.

8. a) Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä, jonka indeksi on k. Osoita, että $g^k \in N$ kaikilla $g \in G$.

   b) Tarkastellaan neliömatriisien rengasta $\mathbb{R}^{n\times n}$. Osoita, että sillä on vain triviaalit ideaalit.

9. Oletetaan, että $\mathrm{syt}(n, m) = 1$. Osoita, että ryhmät $\mathbb{Z}_{nm}$ ja $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ovat isomorfiset.