

Algebra I  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Lisätehtäviä

1. Olkoon  $G = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  ja  $N = \{(1), (12)(34)\}$ . Määritä tekijäryhmän  $G/N$  kertotaulu.
2. Olkoon  $N = \{[0]_{24}, [4]_{24}, [8]_{24}, [12]_{24}, [16]_{24}, [20]_{24}\}$ . Määritä tekijäryhmän  $\mathbb{Z}_{24}/N$  kertotaulu. Määritä tekijäryhmän alkioiden  $[5]_{24} + N$  ja  $[10]_{24} + N$  kertaluku.
3. Määritellään  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + \sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  ja  $I = \{5a + \sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Osoita, että  $I$  on renkaan  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  ideaali. Millainen on tekijärenkas  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/I$ ? Osoita, että kyseessä on kunta. Määritä sen karakteristika.
4. Osoita homomorfialausetta käyttäen, että ryhmä  $\mathbb{Z}_4$  on isomorfinen ryhmän  $\{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$  kanssa. (Laskutoimituksena on jäännösluokkien yhteenlasku.)
5. Osoita, että ryhmät  $7\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$  ja  $\mathbb{Z}_3$  ovat isomorfiset.