Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kertaustehtäviä

Koealueen pääasioita ovat renkaat (sekä kokonaisalueet ja kunnat), tekijärakenteet, homomorfismit ja ryhmien homomorfialause.

1. Määritellään kokonaislukujen laskutoimitukset $\oplus$ ja $\odot$ seuraavasti:
$$a \oplus b = a + b - 1 \quad \text{ja} \quad a \odot b = a + b - ab.$$
Osoita, että $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ on rengas. Osoita, että se on isomorfinen renkaan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kanssa.

2. Osoita, että joukko $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ on kunta.

3. Olkoon $A$ joukko ja $B$ sen osajoukko. Osoita, että $\mathcal{P}(B)$ on renkaan $(\mathcal{P}(A), \triangle, \cap)$ ideaali. (Katso esimerkki 9.6.)

4. Olkoon $G$ ryhmä, jonka neutraalialkio on $e$. Osoita, että $G \times \{e\}$ on ryhmän $G \times G$ normaali aliryhmä.

5. Olkoon $G = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ja $N = \{(1), (12)(34)\}$. Määritä tekijäryhmän $G/N$ kertotaulu.

6. Määritellään $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + \sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ja $I = \{5a + \sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $I$ on renkaan $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ideaali. Millainen on tekijärengas $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/I$? Osoita, että kyseessä on kunta. Määritä sen karakteristika.

7. Osoita, että ryhmät $7\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}_3$ ovat isomorfiset.

8. Merkitään $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Osoita, että kuvaus
$$f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}_+, \cdot), \quad f(x) = |x|$$
on ryhmähomomorfismi. Mikä on sen ydin? Osoita, että $\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}_+$.

9. Olkoon $D$ kokonaisalue ja olkoot $a, b, c \in D$. Oletetaan, että $a \neq 0$ ja $ab = ac$. Osoita, että $b = c$.

10. a) Anna esimerkki kahdesta eri polynomista, joita vastaa sama polynomikuvaus.
    b) Olkoon $f = X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$. Ilmaise $f$ jaottomien polynomien tulona. Miten tilanne muuttuu, jos kerroinkuntana onkin $\mathbb{Q}$?