

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kertaustehtäviä

1. Olkoon $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on bijektio}\}$. Tiedämme, että G on ryhmä, kun laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen. Osoita, että

$$H = \{f \in G \mid f(1) = 1\}$$

on ryhmän G aliryhmä.

2. Määritellään rationaaliluvuille laskutoimitus $*$ seuraavasti:

$$x * y = 2xy.$$

(Yhtälön oikealla puolella oleva kertolasku on tavallinen rationaalilukujen kertolasku.) Osoita, että $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ on ryhmä.

3. a) Määritä ryhmän \mathbb{Z}_{16} aliryhmä $\langle [4]_{16} \rangle$.
b) Määritä ryhmän S_4 aliryhmä $\langle (1234), (13)(24) \rangle$.
4. a) Määritä aliryhmän $6\mathbb{Z}$ vasemmat sivuluokat ryhmässä $(\mathbb{Z}, +)$. Ovatko sivuluokat $27 + 6\mathbb{Z}$ ja $52 + 6\mathbb{Z}$ samat?
b) Määritä aliryhmän $\{(1), (13)\}$ vasemmat sivuluokat ryhmässä S_3 . Ovatko ne samat kuin oikeat sivuluokat?
5. a) Olkoot A ja B joukkoja. Osoita, että $A = A \cup (A \cap B)$.
b) Olkoon $f : X \rightarrow Y$ kuvaus ja $A \subset X$. Osoita, että $A \subset f^{-1}[f[A]]$.
c) Määritellään kokonaisluvuille relaatio

$$a \sim b \iff n \mid (a + b).$$

Onko relaatio refleksiivinen, symmetrinen tai transitiiivinen? Onko se ekvivalenssirelaatio?

6. a) Etsi ryhmän \mathbb{Z}_{16} aliryhmät. Mitkä ovat niiden kertaluvut? Entä indeksit? Piirrä kuvat aliryhmistä ja niiden sivuluokista.
b) Olkoon G syklinen ryhmä, jonka virittää alkio g . Oletetaan, että $o(g) = 364$. Mikä on G :n aliryhmän $\langle g^{87} \rangle$ kertaluku?
c) Määritä ryhmän \mathbb{Z}_{364} aliryhmän $\langle [87]_{364} \rangle$ kertaluku.