Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 9
12.4.–16.4.2010

1. Osoita, että jos ryhmä on vaihdannainen, niin kaikki sen tekijäryhmät ovat vaihdannaisia.

2. Määritä renkaan $\mathbb{Z}_{12}$ ideaali $I = \langle [4] \rangle$. Millainen on tekijärengas $\mathbb{Z}_{12}/I$? Vertaa tekijärenkaan laskutoimitustauluja renkaan $\mathbb{Z}_4$ laskutoimitustauluihin.

3. Määritä renkaan $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ideaali $\langle i \rangle$. Millainen on tekijärengas $\mathbb{Z}[i]/\langle i \rangle$?

4. Määritellään
$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä on rengas. Määritä sen ideaali $I = \langle \sqrt{3} \rangle$. Määritä tekijärenkaan $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/I$ laskutoimitustaulut ja totea, että kyseessä on kunta. Mikä on sen karakteristika?

5. Toisinaan kuvaus yritetään määritellä kaavalla, jonka arvot riippuvat siitä, missä muodossa lähtöjoukon alkiot kirjoitetaan. Tällöin sanotaan, että kuvaus ei ole *hyvin määritelty*. (Vertaa hyvin määritellyt laskutoimitukset.)

   a) Onko kuvaus $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(a/b) = a + b$ hyvin määritelty? Jos on, niin tutki, onko se ryhmähomomorfismi ryhmältä $(\mathbb{Q}, +)$ itselleen.

   b) Onko kuvaus $g : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $g(a/b) = b/a$ hyvin määritelty? Jos on, niin tutki, onko se ryhmähomomorfismi ryhmältä $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ itselleen.

6. Tutki, ovatko seuraavat kuvaukset ryhmähomomorfismeja.

   a) $f : \ (\mathbb{Z}_{12}, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +), \quad f(x) = 3x$

   b) $g : \ (\mathbb{R}, \setminus\{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R}, \setminus\{0\}, \cdot), \quad g(x) = 3x$

   c) $h : \ (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \quad h(x) = x^2$

   d) $i : \ (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), \quad i(x) = (-1)^x$

7*. Seuraava tehtävä on hieman haastavampi harjoitus sellaista kaipaaville. Tätä tehtävää ei käsitellä laskuharjoituksissa, eikä sen ratkaisemisesta saa lisäpisteitä.

   a) Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä, jonka indeksi on k. Osoita, että $g^k \in N$ kaikilla $g \in G$.

   b) Tarkastellaan neliömatriisien rengasta $\mathbb{R}^{n \times n}$. Osoita, että sillä on vain triviaalit ideaalit.