

Algebra I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Harjoitus 8

29.3.–9.4.2010

1. Osoita, että ryhmän S_4 aliryhmä $\{(1), (12)(34)\}$ ei ole normaali.
2. Merkitään $G = \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$. Tiedämme, että G on ryhmä. Osoita, että sen aliryhmä $N = \{(1), (12)\}$ on normaali. Kirjoita tekijäryhmän G/N kertotaulu. Vertaa tekijäryhmän kertotaulua ryhmän G kertotauluun samalla tavalla kuin luentomateriaalin esimerkissä.
3. Tarkastellaan ryhmän \mathbb{Z}_8 aliryhmää $N = \langle [4]_8 \rangle$. Kirjoita tekijäryhmän \mathbb{Z}_8/N kertotaulu. Vertaa sitä ryhmän \mathbb{Z}_8 kertotauluun samalla tavalla kuin luentomateriaalin esimerkissä. Vertaa tekijäryhmän kertotaulua myös ryhmän \mathbb{Z}_4 kertotauluun.
4. Oletetaan, että $N \trianglelefteq G$ ja $K \trianglelefteq G$. Osoita, että $N \cap K \trianglelefteq G$.
5. a) Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä. Osoita induktiolla, että tekijäryhmän G/N alkion gN pätee $(gN)^k = g^k N$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.
b) Tarkastellaan ryhmän \mathbb{Z}_{16} aliryhmää $N = \langle [4]_{16} \rangle$. Mikä on tekijäryhmän \mathbb{Z}_{16}/N kertaluku? Mitkä ovat alkion $[1]_{16} + N$, $[2]_{16} + N$ ja $[11]_{16} + N$ kertaluvut?
6. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $f(x) = 2x$. Määritä kuva $\text{Im}(f)$ sekä alkukuva $f^{-1}\{0\}$ ja totea, että ne ovat ryhmän \mathbb{Z}_6 aliryhmiä.
- 7*. Seuraava tehtävä on hieman haastavampi harjoitus sellaista kaipaaville. Tätä tehtävää ei käsitellä laskuharjoituksissa, eikä sen ratkaisemisesta saa lisäpisteitä.
a) Olkoon G ryhmä, $H \leq G$ ja $N \trianglelefteq G$. Osoita, että $HN \leq G$.
b) Jos g ja h ovat ryhmän G alkioita, niin niiden *kommutaattoriksi* kutsutaan alkioita $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Osoita, että kommutaattorien virittämä aliryhmä $G' = \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$ on normaali. Osoita, että G/G' on vaihdannainen ryhmä.